

## تراکم لایه ای و اندازه درجه تراکم عمومی لایه ای

فرزاد رضائی بalf\*<sup>۱</sup>، رضا شاهوردی<sup>۱</sup>، راحله سادات میرفندرسکی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائم شهر، دانشکده فنی و مهندسی، گروه ریاضی، قائم شهر، ایران

<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائم شهر، تحصیلات تکمیلی، گروه ریاضی، قائم شهر، ایران

رسید مقاله: پنجم اردیبهشت ماه ۱۳۹۰

پذیرش مقاله: پانزدهم مرداد ماه ۱۳۹۰

### چکیده

مفهوم اقتصادی تراکم اخیرا در بسیاری از تحقیقات مربوط به تحلیل پوششی داده ها (DEA) بررسی شده و تراکم با روش های مختلف به دست آمده است. همچنین تراکم عمومی، تعیین و اندازه درجه تراکم عمومی معرفی شده است [۱]. می دانیم ناکارایی یک واحد تصمیم گیرنده شرط لازم برای وجود تراکم آن واحد است، همچنین برای تعیین تراکم یک واحد، ابتدا تصویر آن واحد (در ماهیت خروجی) را باید روی مرز کارایی بیابیم و سپس تراکم تصویر را مورد ارزیابی قرار دهیم. حال سوال زیر پیش می آید: آیا همواره درعمل می توان یک واحد ناکارا را در ماهیت خروجی روی مرز کارایی تصویر کرد؟ از اینرو برای پاسخ به این پرسش ایده تراکم لایه ای را مطرح نمودیم. به بیان دیگر، هدف از به دست آوردن تراکم لایه ای این است که گاهی یک واحد تحت ارزیابی نمی تواند تمام ناکارایی خود را از بین ببرد. این مقاله به منظور ازین بردن تراکم واحد ارزیابی شونده (DMU)، تراکم لایه ای را معرفی و اندازه درجه تراکم عمومی را در لایه های مختلف محاسبه کرده است.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده ها، تراکم، کارایی.

### ۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده ها (DEA)، یک روش برنامه ریزی برای محاسبه کارایی نسبی یک گروه متجانس از واحدهای تصمیم گیرنده با چندین ورودی و چندین خروجی است. یکی از کاربردهای مهم تحلیل پوششی داده ها، مفهوم تراکم است. تراکم برای نخستین بار توسط فار و سون سون [۲] مطرح شد، و پس از آن توسط فار و گروسکوف [۳] شکل کامل تری بخود گرفت. فارمدلی در تحلیل پوششی داده ها برای ارزیابی تراکم ارایه کرد که تنها روش کاربردی جهت ارزیابی تراکم در مسایل عملی در آن زمان بود [۴]. این امر موجب گردید تا تحقیقات بیشتری در این زمینه برای محاسبه تراکم صورت گیرد، روش ارایه شده توسط فار دارای مشکلاتی بود، مثلا واحدی که تراکم نداشت را دارای تراکم معرفی می کرد، تا این که کوپر روشی کامل تری برای محاسبه تراکم ارایه کرد [۵].

تحقیقات کوپر توسط براکت گسترش یافت و در نهایت روش BCSW (براکت - کوپر - شین - ونگ) نام گرفت [۶]. کوپر و همکارانش روش جدیدی برای محاسبه تراکم معرفی کردند که بر خلاف روش های قبلی (که ارزیابی تراکم منجر به حل دو مدل از مدل های DEA می گشت) در این روش تنها با حل یک مدل مقدار تراکم محاسبه می شد، به همین دلیل به روش تک مرحله ای معروف شد [۷]. از دیگر مدل های ارائه شده برای ارزیابی تراکم مدل New بود که توسط وی و یان معرفی گردید [۸]. در سال های اخیر نیز بسیاری از دانشمندان با مقالات متعدد در مورد تراکم بحث نمودند به عنوان مثال تن و ساهو یک دستورالعمل غیر پارامتریک برای اندازه گیری حساسیت شاخص تولید همراه با تراکم پیشنهاد دادند [۹].

همانطور که گفته شد تراکم با مجموعه تلاش های تحقیقاتی کوپر و همکارانش مورد بررسی جدی قرار گرفت ([۶]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲] و [۱۳]). آن ها در صدور تراکم بر مبنای تحلیل پوششی داده ها سهم عمده ای داشتند. اما یک نقطه ضعف در تحقیقات قبلی وجود داشت و آن این که برای محاسبه تراکم جواب های بهینه چندگانه مورد توجه قرارنگرفته بود (به عبارت دیگر تصویر یک واحد تحت ارزیابی روی مرز کارایی، یکتا بود). در صورتی که تصویریک واحد تصمیم گیرنده یکتا نباشد تراکم منحصر به فرد به دست نمی آید و این یک نقطه ضعف مطالعات قبلی بود. برای برطرف کردن این مشکل سویوشی و سکیتانی [۱] مقاله ای ارائه کردند که این ضعف را از بین برده است. مقاله آن ها روشی برای محاسبه درجه تراکم ارائه می دهد.

می دانیم در تحلیل پوششی داده ها برخی از واحدهای ناکارا می توانند تراکم اختیار کنند، به بیان دقیق تر شرط داشتن تراکم توسط یک واحد تصمیم گیرنده ناکارایی آن واحد است. حال اگر بخواهیم در یک سیستم بزرگ تراکم واحدها را محاسبه کنیم. ممکن است دچار مشکلاتی بشویم، به عبارت دیگر نتوانیم برای محاسبه تراکم در ماهیت ورودی یک واحد تصمیم گیرنده، آن واحد را در عمل روی مرز کارایی (در ماهیت خروجی) تصویر کنیم. از این رو نیازمندیم در زیر سیستم ها روند را دنبال کنیم، به بیان دیگر برای محاسبه تراکم ناچاریم مجموعه امکان تولید را به نوعی محدودتر کنیم (کوچکتر می کنیم) این عمل به کمک فرایند لایه سازی محقق می شود.

## ۲ پیشینه تراکم

### ۲-۱ تعریف تراکم

یک واحد تصمیم گیرنده دارای تراکم است هر گاه کاهش در یک یا چند ورودی آن همراه با افزایش در یک یا چند خروجی آن باشد بدون این که ورودی و خروجی دیگر واحد ها بدتر شود و همچنین افزایش در یک یا چند ورودی آن همراه با کاهش در یک یا چند خروجی آن باشد بدون این که ورودی ها و خروجی های دیگر واحد ها بدتر شوند.



مرحله اول FGL

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \phi = \phi^* \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 & \phi: \text{URS}, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{1}$$

مرحله دوم FGL

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \beta = \beta^* \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \beta y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 & \beta: \text{URS}, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{2}$$

اگر مقدار بهینه مدل (۱-۲)،  $\phi^*$  و مقدار بهینه مدل (۲-۲)،  $\beta^*$  بنامیم، آن گاه تعریف می کنیم.

$$OC(\phi^*, \beta^*) = \frac{\phi^*}{\beta^*} \tag{3}$$

که در این صورت وجود یا عدم وجود تراکم به صورت زیر تعیین می گردد.

الف. اگر  $OC(\phi^*, \beta^*) > 1$ ،  $OC(\theta^*, \beta^*) > 1$  آن گاه در ورودی های  $DMU_k$  تراکم وجود دارد.

ب. اگر  $OC(\phi^*, \beta^*) = 1$ ،  $OC(\theta^*, \beta^*) = 1$  آن گاه در ورودی های  $DMU_k$  تراکم وجود ندارد.

## ۲-۴ تعریف تراکم عمومی

یک DMU دارای تراکم عمومی است اگر و فقط اگر آن روی مرز  $P$  محدب باشد و در  $P$  محدب فعالیت داشته باشیم که با بکارگیری منابع کمتر در یک یا چند ورودی آن DMU، نتایج بیشتری در یک یا چند خروجی ایجاد کند [۸].

## ۵-۲ تراکم عمومی با تصاویر چند گانه

برای تعیین تراکم عمومی از روش زیر که مرکب از دو مساله برنامه ریزی خطی است استفاده می کنیم [۱].  
گام اول.  $\delta > 0$  را بطور دلخواه انتخاب کنید ( $\delta$  یک عدد حقیقی است) و مساله زیر را حل کنید.

$$\text{Max } \varepsilon + \sum_{r=1}^s s_r^+ \quad (4)$$

s.t.

$$-\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + w \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} = 1,$$

$$\beta y_{rk} = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - w = \beta,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

$$v_i x_{ik} - \varepsilon \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\varepsilon \leq \delta,$$

$$s_r^+ \geq 0, u_r \geq 0, \lambda_j \geq 0, r = 1, \dots, s, j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m,$$

$$v_i : \text{URS}, w : \text{URS}, \beta : \text{URS}, \varepsilon : \text{URS}.$$

عدد حقیقی دلخواه ( $\delta$ ) ضامن وجود جواب بهینه (۴) است. چون  $\varepsilon$  کوچکترین مقدار  $v_i x_{ik} (i = 1, \dots, m)$  می باشد  $\varepsilon = \min\{\min\{v_i x_{ik} \mid i = 1, \dots, m\}, \delta\}$  نشان می دهد عدد دلخواه  $\delta$  از بالا کراندار است در نتیجه (۴) همیشه جواب بهینه دارد.

جواب بهینه (۴) را  $(\lambda^*, \beta^*, s^{+*}, v^*, u^*, w^*, \varepsilon^*)$  در نظر بگیرید. تراکم عمومی نقطه تصویر شده از  $DMU_k$  یعنی

$$(x_k, \beta^* y_k)$$

الف) اگر  $\varepsilon^* < 0$  باشد پس  $(x_k, \beta^* y_k)$  تراکم عمومی دارد.

ب) اگر  $\varepsilon^* > 0$  باشد پس  $(x_k, \beta^* y_k)$  تراکم عمومی ندارد.

ج) اگر  $\varepsilon^* = 0$  و  $\sum_{r=1}^s s_r^{+*} > 0$  پس  $(x_k, \beta^* y_k)$  تراکم عمومی دارد.

د) اگر  $\varepsilon^* = 0$  و  $\sum_{r=1}^s s_r^{+*} = 0$  پس برو به گام ۲

گام ۲. مساله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} & \text{Max } \alpha \\ & \text{s.t} \\ & -\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + w \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} = 1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - w = \beta^*, \\ & u_r y_{rk} - \alpha \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ & v_i \geq 0, \quad u_r \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s, \quad w : \text{URS}. \end{aligned}$$

$\beta^*$  از روی جواب بهینه (۴) به دست آمده است. کران پایین  $u_r y_{rk}$  با  $\alpha$  نشان داده شده بدین صورت که  $\alpha = \min\{u_r y_{rk} \mid r = 1, \dots, s\}$  و مساله (۵-۲) کران پایین را ماکزیمم می‌کند. بر مبنای بهینگی مقدار هدف (۵) تراکم عمومی  $DMU_k$  مانند زیر تعیین می‌شود.

الف) اگر  $\alpha^* > 0$  پس  $(x_k, \beta^* y_k)$  تراکم عمومی ندارد.

ب) اگر  $\alpha^* = 0$  پس  $(x_k, \beta^* y_k)$  تراکم عمومی دارد.

**قضیه ۱.** فرض کنید  $\delta > 0$  و  $(\lambda^*, \beta^*, s^{+*}, v^*, u^*, w^*, \varepsilon^*)$  جواب بهینه مدل (۴) باشد. فرض کنید

$$\Delta^* = \sum_{r=1}^s s_r^{+*} \text{ نشان دهید:}$$

(۱) اگر  $\varepsilon^* < 0$  یا  $(\varepsilon^* = 0 \text{ و } \Delta^* > 0)$  پس  $DMU_k$  تراکم عمومی دارد.

(۲) اگر  $\varepsilon^* > 0$  پس  $DMU_k$  تراکم عمومی ندارد.

(۳) اگر  $\varepsilon^* = 0$  و  $\Delta^* = 0$  باشد، مقدار بهینه (۵-۲) را  $\alpha^*$  قرار دهید. اگر  $\alpha^* = 0$  باشد،  $DMU_k$

تراکم عمومی دارد در غیر این صورت تراکم عمومی ندارد.

**اثبات.** به مرجع [۱۴] مراجعه شود.

**قضیه ۲.** فرض کنید  $\delta > 0$  و  $(\lambda^*, \beta^*, s^{+*}, v^*, u^*, w^*, \varepsilon^*)$  جواب بهینه مدل (۴-۲) باشد و مقدار بهینه

(۱-۲) را  $\varphi^*$  قرار دهید. نشان دهید:

(۱) اگر  $\varepsilon^* \geq 0$  باشد آن گاه  $\varphi^* = \beta^*$  بنابراین  $DMU_k$  طبق رابطه (۳-۲) تراکم ندارد.

(۲) اگر  $\varepsilon^* < 0$  آن گاه  $\varphi^* > \beta^*$ . بنابراین  $DMU_k$  طبق رابطه (۳-۲) تراکم دارد.

**اثبات.** به مرجع [۱] مراجعه شود.

## ۶-۲ درجه تراکم عمومی

رابطه (۶) زیر درجه تراکم عمومی را نشان می دهد (به مرجع [۱] مراجعه کنید).

$$\beta^* = (\max \min \{x_{ik} v_i^* | i = 1, \dots, m\})^{-1} \quad (6)$$

که  $(v^*, u^*, w^*)$  جواب بهینه دوال مدل (۲) می باشد.

**قضیه ۳.** فرض کنید  $\delta > 0$  و  $(\lambda^*, \beta^*, s^{+*}, v^*, u^*, w^*, \varepsilon^*)$  جواب بهینه مدل (۲-۴) باشد تعریف کنید:

$$\Omega = \{(v^\#, u^\#, w^\#) \mid \text{یک جواب بهینه (۲-۲)}\}$$

اگر  $DMU_k$  تراکم عمومی داشته باشد آن گاه:

$$\varepsilon^* = \max \min \{x_{ik} v_i^\# | i = 1, \dots, m\} = \max \min \{x_{ik} v_i^\# | v_i^\# \leq 0\}$$

و

$$\frac{\beta^*}{\varepsilon^*} = \beta^* (\max \min \{x_{ik} v_i^\# | i = 1, \dots, m\})^{-1}$$

درجه تراکم عمومی (۶) را نشان می دهد [۱].

## ۳ تراکم لایه ای

در این قسمت قبل از هر چیز به بیان مرزهای کارایی لایه ای می پردازیم. می دانیم در تحلیل پوششی داده ها هر مجموعه امکان تولید یک مرز کارایی می سازد و با استفاده از آن کارایی واحدها و نیز تراکم واحدها سنجیده می شود. اگر مرز کارایی اصلی که متناظر با واحدهای کارا است را حذف کنیم، واحدهای باقیمانده (واحدهای ناکارا) یک مرز کارایی جدید لایه دوم را ایجاد می کنند. اگر این مرز لایه دوم را نیز حذف کنیم، مرز کارایی لایه سوم، شکل خواهد گرفت و الی آخر، تا جایی که هیچ واحدی باقی نماند.

قرار دهید  $J^1 = \{1, \dots, n\}$ . تعریف می کنیم  $J^{h+1} = J^h - E_p^h$  که در آن  $E_p^h = \{DMU_K \in J^h | \beta_{kh}^* = 1\}$  و  $E^h = \{DMU_K \in J^h | \varphi_{kh}^* = 1\}$  که  $\varphi_{kh}^*$  مقدار بهینه مدل برنامه ریزی خطی (۷) و  $\beta_{kh}^*$  مقدار بهینه مدل برنامه ریزی خطی (۸) است.

$$\varphi_{kh}^* = \text{Max } \varphi_{kh}$$

s.t.

$$\sum_{j \in J^h} \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik}, \quad \forall i \in I, \quad (7)$$

$$\sum_{j \in J^h} \lambda_j y_{ij} \geq \varphi_{kh} y_{rk}, \quad \forall r \in O,$$

$$\sum_{i \in J^h} \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \forall j \in J^h.$$

وقتی  $h=1$  باشد، مدل (7) همان مدل  $BCC$  در ماهیت خروجی است. در ماهیت خروجی مدل  $BCC$   $\varphi_{kh} \geq 1$  و  $DMU_{kh}$  کاراست اگر و فقط اگر  $\varphi_{kh}^* = 1$ ، در غیر این صورت  $DMU_{kh}$  ناکاراست. مدل (7) تمامی واحدها را به صورت مرحله ای در مجموعه  $E^h$ ، طبقه بندی می کند. برای به دست آوردن تراکم لایه ای نیاز به مدل زیر داریم.

$$\beta_{kh}^* = \text{Max } \beta_{kh}$$

s.t.

$$\sum_{j \in J^h} \lambda_j x_{ij} = x_{ik}, \quad \forall i \in I, \quad (8)$$

$$\sum_{j \in J^h} \lambda_j y_{ij} \geq \beta_{kh} y_{rk}, \quad \forall r \in O,$$

$$\sum_{i \in J^h} \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \forall j \in J^h.$$

وقتی  $h=1$  باشد مدل (8) همان مدل  $P$  محدب در ماهیت خروجی است، در این مدل  $\beta^* \geq 1$  است، واحد  $DMU_{kh}$  در  $P$  محدب کاراست اگر و فقط اگر  $\beta_{kh}^* = 1$  باشد در غیر این صورت آن واحدی ناکاراست، این مدل تمام واحدها را به صورت مرحله ای در مجموعه های  $E_p^h$  طبقه بندی می کند.

حال تراکم را در لایه های مختلف با روش  $FGL$  به دست می آوریم. برای تعیین تراکم در هر لایه از رابطه

$$OC(\varphi_{kh}^*, \beta_{kh}^*) = \frac{\varphi_{kh}^*}{\beta_{kh}^*}$$

استفاده می کنیم.

۱. اگر  $OC(\varphi_{kh}^*, \beta_{kh}^*) > 1$  پس در ورودی های  $DMU_{kh}$  نسبت به  $E^h$  تراکم وجود دارد.

۲. اگر  $OC(\varphi_{kh}^*, \beta_{kh}^*) = 1$  باشد پس در ورودی های  $DMU_{kh}$  نسبت به  $E^h$  تراکم وجود ندارد.

وقتی  $DMU$  های کارا در لایه اول را حذف کنیم تعدادی از  $DMU$  های متراکم (واحد‌هایی که تراکم دارند) که روی مرز  $P$  محدب قرار دارند، حذف می شوند. برای لایه بعدی دوباره رابطه را امتحان می کنیم. در هر مرحله وقتی از لایه ای به لایه دیگر می رویم  $DMU$  های متراکم تغییر می کنند یعنی ممکن است یک  $DMU$  در یک لایه تراکم داشته باشد (نداشته باشد) و در لایه بعد از آن تراکم نداشته باشد (داشته باشد) و این موضوع جالبی است که باید به آن توجه شود، که تاکنون نادیده گرفته شده است.

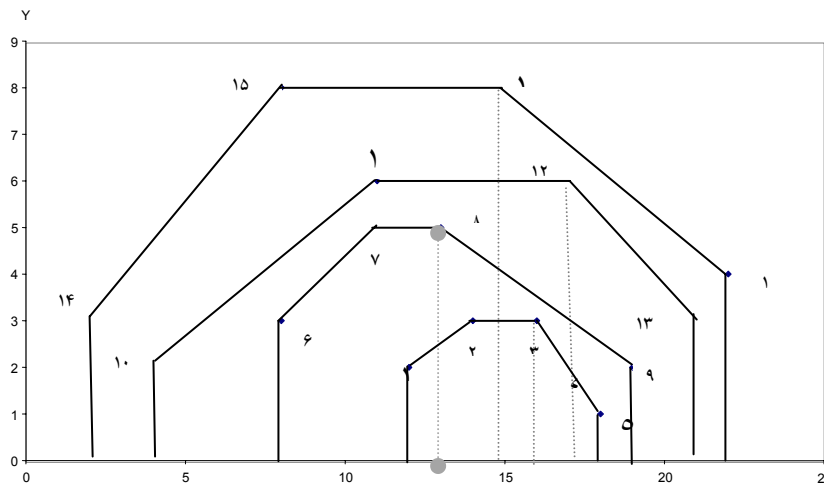
می دانیم ناکارایی یک واحد تصمیم گیرنده شرط لازم برای وجود تراکم آن واحد است، همچنین برای تعیین تراکم یک واحد، ابتدا تصویر آن واحد (در ماهیت خروجی) را باید روی مرز کارایی بیابیم و سپس تراکم تصویر آن واحد را مورد ارزیابی قرار دهیم. حال سوال زیر پیش می آید: آیا همواره در عمل می توان یک واحد ناکارا را در ماهیت خروجی روی مرز کارایی تصویر کرد؟ از اینرو برای پاسخ به این پرسش ایده تراکم لایه ای را مطرح نمودیم. به بیان دیگر، هدف از به دست آوردن تراکم لایه ای این است که گاهی یک  $DMU$  نمی تواند تمام ناکارایی خود را از بین ببرد، به عبارتی مقدار ناکارایی نسبت به لایه اول بالاست و در موقعیت عملی نمی تواند به یکباره آن را جبران کند. از اینرو ناکارایی و سپس تراکم آن را نسبت به لایه های مختلف در صورت وجود، به دست می آوریم، تا امکان دسترسی به آن بصورت عملی بیشتر باشد. برای درک بیشتر موضوع به شکل زیر توجه کنید.

#### ۴ مثال عددی برای تعیین تراکم لایه ای

در مجموعه امکان تولید شکل (۲)، ۱۷ واحد تصمیم گیرنده داریم که آن را با جواب مدل (۷) و (۸) به صورت لایه ای در جداول ذیل آمده است.

جدول ۱. واحدهای تحت ارزیابی شامل یک ورودی و یک خروجی

$DMU$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
X	۱۲	۱۴	۱۶	۱۷	۱۸	۸	۱۱	۱۳	۱۹	۴	۱۱	۱۷	۲۱	۲	۸	۱۵	۲۲
Y	۲	۳	۳	۲	۱	۳	۵	۵	۲	۲	۶	۶	۳	۳	۸	۸	۴



شکل ۲. مجموعه امکان تولید برای مدل های (۷) و (۸)

با به کارگیری مدل های ۷ و ۸ بر روی جدول ۱ جدول زیر را می یابیم.

جدول ۲. تراکم و کارایی در لایه اول

DMU	x	y	$\phi^*$	$\beta^*$	حالت تراکم	کارایی با (۲-۳)	کارایی با (۱-۳)
۱	۱۲	۲	۴	۴	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۲	۱۴	۳	۲/۶۶۶	۲/۶۶۶	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۳	۱۶	۳	۲/۶۶۶	۲/۴۷۶	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۴	۱۷	۲	۴	۳/۴۲۸	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۵	۱۸	۱	۸	۶/۲۸۵	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۶	۸	۳	۲/۶۶۶	۲/۶۶۶	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۷	۱۱	۵	۱/۶	۱/۶	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۸	۱۳	۵	۱/۶	۱/۶	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۹	۱۹	۲	۴	۲/۸۵۷	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۱۰	۴	۲	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۱۱	۱۱	۶	۱/۳۳۳	۱/۳۳۳	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۱۲	۷	۶	۱/۳۳۳	۱/۱۴۳	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۱۳	۲۱	۳	۲/۶۶۶	۱/۵۲۴	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۱۴	۲	۳	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۱۵	۸	۸	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۱۶	۱۵	۸	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۱۷	۲۲	۴	۲	۱	تراکم دارد	ناکارا	کارا

با توجه به جدول (۲)،  $E_p^1, E^1$  را به دست می آوریم  $J^1 = \{1, 2, \dots, 17\}$ ،  $E^1 = \{14, 15, 16\}$ ،  $E_p^1 = \{14, 15, 16, 17\}$  برای به دست آوردن لایه دوم DMU های کارا در لایه اول را از مجموعه امکان P محذب حذف می کنیم.

$$J^2 = J^1 - E_p^1 = \{1, 2, \dots, 13\} \quad \text{قرار دهید:}$$

جدول ۳. تراکم و کارایی در لایه دوم

DMU	x	y	$\varphi^*$	$\beta^*$	حالت تراکم	کارایی با (۲-۳)	کارایی با (۱-۳)
۱	۱۲	۲	۳	۳	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۲	۱۴	۳	۲	۲	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۳	۱۶	۳	۲	۲	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۴	۱۷	۲	۳	۳	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۵	۱۸	۱	۶	۵/۲۵	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۶	۸	۳	۱/۴۲۸	۱/۴۲۸	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۷	۱۱	۵	۱/۲	۱/۲	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۸	۱۳	۵	۱/۲	۱/۲	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۹	۱۹	۲	۳	۲/۲۵	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۱۰	۴	۲	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۱۱	۱۱	۶	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۱۲	۱۷	۶	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۱۳	۲۱	۳	۲	۱	تراکم دارد	ناکارا	کارا

با توجه به جدول (۳)،  $E_p^2, E^2$  را به دست می آوریم.  $E_p^2 = \{10, 11, 2, 13\}$  ،  $E^2 = \{10, 11, 12\}$  قرار دهید:

$$J^2 = J^1 - E_p^2 = \{1, 2, \dots, 9\}$$

جدول ۴. تراکم و کارایی در لایه سوم

DMU	x	y	$\varphi^*$	$\beta^*$	حالت تراکم	کارایی با (۱-۳)	کارایی با (۲-۳)
۱	۱۲	۲	۲/۵	۲/۵	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۲	۱۴	۳	۱/۶۶۶	۱/۵	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۳	۱۶	۳	۱/۶۶۶	۱/۶۶۶	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۴	۱۷	۲	۲/۵	۱/۵	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۵	۱۸	۱	۵	۲/۵	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۶	۸	۳	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۷	۱۱	۵	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۸	۱۳	۵	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۹	۱۹	۲	۲/۵	۱	تراکم دارد	ناکارا	کارا

با توجه به جدول (۴)،  $E_p^3, E^3$  را به دست می آوریم.  $E_p^3 = \{6, 7, 8, 9\}$  ،  $E^3 = \{6, 7, 8\}$  آن گاه قرار دهید:

$$J^4 = J^3 - E_p^3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

جدول ۵. تراکم و کارایی در لایه چهارم

DMU	x	y	$\varphi^*$	$\beta^*$	حالت تراکم	کارایی با (۱-۳)	کارایی با (۲-۳)
۱	۱۲	۲	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۲	۱۴	۳	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۳	۱۶	۳	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۴	۱۷	۲	۱/۵	۱	تراکم دارد	ناکارا	کارا
۵	۱۸	۱	۳	۱	تراکم دارد	ناکارا	کارا

با توجه به جدول (۵)،  $E_p^4, E^4$  را به دست می آوریم.  $E_p^4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ،  $E^4 = \{1, 2, 3\}$

پس از بررسی تمام واحدها، که در چهار لایه دسته بندی شده اند و همچنین با توجه به شکل (۱) و جداول (۲) و (۳) و (۴) و (۵) مجموعه امکان‌های تولید به چهار مجموعه با مرز کارایی زیر تفکیک می شوند.

$$E_p^1 = \{1, 4, 15, 16, 17\}$$

$$E_p^2 = \{1, 11, 12, 13\}$$

$$E_p^3 = \{6, 7, 8, 9\}$$

$$E_p^4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

۱. در لایه اول  $DMU$  های  $\{3, 4, 5, 9, 12, 13, 17\}$  تراکم دارند.

۲. در لایه دوم  $DMU$  های  $\{5, 9, 13\}$  تراکم دارند.

۳. در لایه سوم  $DMU$  های  $\{2, 3, 4, 5, 9\}$  تراکم دارند.

۴. در لایه چهارم  $DMU$  های  $\{4, 5\}$  تراکم دارند.

توجه به چند نکته ضروری است.

۱.  $DMU_4$  فقط در لایه سوم تراکم دارد و در بقیه لایه ها تراکم ندارد.

۲.  $DMU_3$  در لایه اول و سوم تراکم دارد و در لایه دوم و چهارم تراکم ندارد.

۳.  $DMU_5$  در لایه های اول و سوم و چهارم تراکم دارد.

۴.  $DMU_6$  در همه لایه ها تراکم دارد.

۵.  $DMU_9$  در لایه اول و دوم و سوم تراکم دارد.

۶.  $DMU_{13}$  در لایه اول و دوم تراکم دارد.

۷.  $DMU_{17}, DMU_{12}$  در لایه اول تراکم دارند.

به این  $DMU$  ها که در برخی لایه ها تراکم دارند و در برخی دیگر لایه ها تراکم ندارند باید توجه نمود. برخی  $DMU$  ها مانند  $DMU_6$  در همه لایه ها تراکم دارند. یعنی با کوچک کردن فضای امکان تولید، همچنان تراکم دارد، این چنین واحدهایی مطلوب نیستند و در بررسیهای عملی واحدهایی با این ویژگی را نادیده می گیریم.

## ۵ اندازه گیری درجه تراکم عمومی در لایه های مختلف

برای اندازه گیری درجه تراکم عمومی در لایه های مختلف، مدل (۹) را برای هر واحدهای موجود در هر لایه به کار می بریم تا درجه تراکم عمومی هر  $DMU_k$  را برای هر لایه به دست آوریم با توجه به قضیه ۱ و قضیه ۲ داریم.

- اگر  $\varepsilon^* < 0$  باشد،  $DMU_k$  هم تراکم دارد و هم تراکم عمومی دارد.

- اگر  $\varepsilon^* > 0$  باشد،  $DMU_k$  تراکم ندارد و تراکم عمومی هم ندارد.

- اگر  $\varepsilon^* = 0$  باشد، تراکم ندارد و برای تعیین تراکم عمومی به  $\Delta^*$  توجه می کنیم.  
 - اگر  $\Delta^* > 0$  باشد، پس تراکم عمومی دارد و اگر  $\Delta^* = 0$  باشد پس مدل (۲-۵) را برای تعیین  $\alpha^*$  به کار می بریم.

- اگر  $\alpha^* = 0$  باشد،  $DMU_k$  تراکم عمومی دارد.  
 - اگر  $\alpha^* > 0$  باشد،  $DMU_k$  تراکم عمومی ندارد.

$$\begin{aligned} \nabla_h = \max \quad & \varepsilon + \sum_{r=1}^s s_r^+ \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + w \leq 0, \quad j \in J^h, \\ & \sum_{j \in J^h} \lambda_j x_{ij} = x_{ik}, \\ & \sum_{j \in J^h} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \beta y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} = 1, \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - w = \beta, \\ & \sum_{j \in J^h} \lambda_j = 1, \\ & v_i x_{ik} - \varepsilon \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \varepsilon \leq \delta, \\ & s_r^+ \geq 0, u_r \geq 0, \lambda_j \geq 0, v_i : URS, w : URS, \beta : URS, \varepsilon : URS, r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, m, j \in J^h. \end{aligned} \tag{9}$$

اگر  $\varepsilon^* = 0$ ،  $\Delta^* = 0$  باشد برای به دست آوردن  $\alpha^*$  مدل زیر را به کار می بریم.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + w \leq 0, \quad j \in J^h, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} = 1, \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - w = \beta^*, \\ & u_r y_{rk} - \alpha \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ & v_i \geq 0, u_r \geq 0, \alpha \geq 0, w : URS, i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{10}$$

که  $\beta^*$  از بهینه (۹) به دست آمده است.

اگر  $(\lambda^*, \beta^*, s^{+*}, v^*, u^*, w^*, \varepsilon^*)$  جواب بهینه مدل (۹) باشد طبق قضیه ۳،  $(\frac{\beta^*}{\varepsilon^*})_h$  درجه تراکم عمومی  $DMU_{kh}$  در لایه های مختلف می باشد.

### ۶ مثال عددی برای اندازه گیری درجه تراکم عمومی در لایه های مختلف

دوباره ۱۷ واحد تصمیم گیرنده در مثال ۴ را برای اندازه گیری درجه تراکم عمومی به کار می بریم. چهار لایه ایجاد می شود که آن ها را بررسی می کنیم. برای تعیین درجه تراکم عمومی واحدهای هر لایه، ابتدا مدل (۹) را برای آن واحدهای آن لایه می نویسیم، برای تعیین تراکم و تراکم عمومی از قضیه ۱ و قضیه ۲ استفاده می کنیم اگر برای  $DMU_{kh}$  ای  $\varepsilon^* = 0$ ،  $\Delta^* = 0$  باشد مدل (۱۰) را نیز برای تعیین  $\alpha^*$  به کار برده و با توجه به قضیه ۳ درجه تراکم عمومی را برای  $DMU$  هایی که تراکم عمومی دارند به دست می آوریم.

جدول ۶. بررسی درجه تراکم عمومی در لایه اول

$DMU$	x	y	$\varepsilon^*$	$\beta^*$	$\Delta^*$	$\alpha^*$	تراکم	تراکم عمومی	$\frac{\beta^*}{\varepsilon^*}$ درجه تراکم عمومی
۱	۱۲	۲	۰	۴	۰	۱	ندارد	ندارد	-
۲	۱۴	۳	۰	۲/۶۶۶	۰	۱	ندارد	ندارد	-
۳	۱۶	۳	-۳/۰۴۷	۲/۴۷۶	۰	-	دارد	دارد	-۰/۸۱۳
۴	۱۷	۲	-۴/۸۵۷	۳/۴۲۸	۰	-	دارد	دارد	-۰/۷۰۶
۵	۱۸	۱	-۱۰/۲۸۶	۶/۲۸۶	۰	-	دارد	دارد	-۰/۶۱۱
۶	۸	۳	۲/۲۲۲	۲/۶۶۶	۰	-	ندارد	ندارد	-
۷	۱۱	۵	۰	۱/۶	۰	۱	ندارد	ندارد	-
۸	۱۳	۵	۰	۱/۶	۰	۱	ندارد	ندارد	-
۹	۱۹	۲	-۵/۴۲۸	۲/۸۵۷	۰	-	دارد	دارد	-۰/۵۲۶
۱۰	۴	۲	۱/۶۶۶	۲/۳۳۳	۰	-	ندارد	ندارد	-
۱۱	۱۱	۶	۰	۱/۳۳۳	۰	۱	ندارد	ندارد	-
۱۲	۱۷	۶	-۱/۶۱۹	۱/۱۴۳	۰	-	دارد	دارد	-۰/۷۰۶
۱۳	۲۱	۳	-۴	۱/۵۲۴	۰	-	دارد	دارد	-۰/۳۸۱
۱۴	۲	۳	۰/۵۵۵	۱	۰	-	ندارد	ندارد	-
۱۵	۸	۸	۰/۸۳۳۳	۱	۰	-	ندارد	ندارد	-
۱۶	۱۵	۸	۰	۱	۰	۱	ندارد	ندارد	-
۱۷	۲۲	۴	-۳/۱۴۳	۱	۰	-	دارد	دارد	-۰/۳۱۸

جدول ۷. بررسی درجه تراکم عمومی در لایه دوم

DMU	x	y	$\varepsilon^*$	$\beta^*$	$\Delta^*$	$\alpha^*$	تراکم	تراکم عمومی	$\frac{\beta^*}{\varepsilon^*}$	درجه تراکم عمومی
۱	۱۲	۲	۰	۳	۰	۱	ندارد	ندارد	-	-
۲	۱۴	۳	۰	۲	۰	۱	ندارد	ندارد	-	-
۳	۱۶	۳	۰	۲	۰	۱	ندارد	ندارد	-	-
۴	۱۷	۲	۰	۳	۰	۱	ندارد	ندارد	-	-
۵	۱۸	۱	-۱۳/۵	۵/۲۵	۰	-	دارد	دارد	-۰/۳۸۹	-
۶	۸	۳	۱/۵۲۴	۱/۴۲۸	۰	-	ندارد	ندارد	-	-
۷	۱۱	۵	۱/۲۵۷	۱/۲	۰	-	ندارد	ندارد	-	-
۸	۱۳	۵	۰	۱/۲	۰	۱	ندارد	ندارد	-	-
۹	۱۹	۲	-۷/۱۲۵	۲/۲۵	۰	-	دارد	دارد	-۰/۳۱۶	-
۱۰	۴	۲	۱/۱۴۳	۱	۰	-	ندارد	ندارد	-	-
۱۱	۱۱	۶	۱/۰۴۸	۱	۰	-	ندارد	ندارد	-	-
۱۲	۱۷	۶	۰	۱	۰	۱	ندارد	ندارد	-	-
۱۳	۲۱	۳	-۵/۲۵	۱	۰	-	دارد	دارد	-۰/۱۹	-

جدول ۸. بررسی درجه تراکم عمومی در لایه سوم

DMU	x	y	$\varepsilon^*$	$\beta^*$	$\Delta^*$	$\alpha^*$	تراکم	تراکم عمومی	$\frac{\beta^*}{\varepsilon^*}$	درجه تراکم عمومی
۱	۱۲	۲	۰	۲/۵	۰	۱	ندارد	ندارد	-	-
۲	۱۴	۳	-۲/۳۳۳	۱/۵	۰	-	دارد	دارد	-۰/۶۴۳	-
۳	۱۶	۳	-۲/۶۶۶	۱/۶۶۶	۰	-	دارد	دارد	-۰/۶۲۵	-
۴	۱۷	۲	-۴/۲۵	۱/۵	۰	-	دارد	دارد	-۰/۳۵۳	-
۵	۱۸	۱	-۹	۲/۵	۰	-	دارد	دارد	-۰/۲۷۷	-
۶	۸	۳	۱/۷۷۷	۱	۰	-	ندارد	ندارد	-	-
۷	۱۱	۵	۱/۴۶۶۶	۱	۰	-	ندارد	ندارد	-	-
۸	۱۳	۵	۰	۱	۰	۱	ندارد	ندارد	-	-
۹	۱۹	۲	-۴/۷۵	۱	۰	-	دارد	دارد	-۰/۲۱	-

جدول ۹. بررسی درجه تراکم عمومی در لایه چهارم

DMU	x	y	$\varepsilon^*$	$\beta^*$	$\Delta^*$	$\alpha^*$	تراکم	تراکم عمومی	$\frac{\beta^*}{\varepsilon^*}$	درجه تراکم عمومی
۱	۱۲	۲	۳	۱	۰	-	ندارد	ندارد	-	-
۲	۱۴	۳	۲/۳۳۳	۱	۰	-	ندارد	ندارد	-	-
۳	۱۶	۳	۰	۱	۰	۱	ندارد	ندارد	-	-
۴	۱۷	۲	-۸/۵	۱	۰	-	دارد	دارد	-۰/۱۱۸	-
۵	۱۸	۱	-۱۸	۱	۰	-	دارد	دارد	-۰/۵۵	-

درجه تراکم عمومی DMU های متراکم در لایه های مختلف را در جدول زیر بیان می کنیم.

جدول ۱۰. مقایسه درجه تراکم عمومی در چهار لایه

DMU	لایه اول	لایه دوم	لایه سوم	لایه چهارم
۲	-	-	-۰/۶۴۳	-
۳	-۰/۸۱۳	-	-۰/۶۲۴	-
۴	-۰/۷۰۶	-	-۰/۳۵۳	-۰/۱۱۸
۵	-۰/۶۱۱	-۰/۳۸۹	-۰/۲۷۷	-۰/۰۵۵
۹	-۰/۵۲۶	-۰/۳۱۶	-۰/۲۱	-
۱۲	-۰/۷۰۶	-	-	-
۱۳	-۰/۳۸۱	-۰/۱۹	-	-
۱۷	-۰/۳۱۸	-	-	-

علامت منفی درجه تراکم عمومی، مربوط به علامت  $\varepsilon^*$  می باشد که دلیلی بر وجود تراکم عمومی است. با توجه به سطرها

می بینیم هر  $DMU$  در صورت داشتن تراکم عمومی، با محدود شدن مجموعه امکان تولید یا به عبارتی با پیشروی لایه ها، درجه تراکم عمومی افزایش پیدا می کند در هر لایه، هر چه  $DMU$  از حد شروع تراکم در ورودی، فاصله بیشتری داشته باشد درجه تراکم عمومی بیشتری شود.

## ۷ نتیجه گیری

به علت پراکندگی واحدها در مجموعه امکان تولید برای سیستمهای بزرگ، ممکن است در تعیین تراکم یک واحد، بخصوص واحدی که نمی تواند تمام ناکارایی خود را از بین ببرد و خود را به مرز کارایی برساند، با مشکلاتی روبرو شویم. از این رو مجموعه امکان تولید را به کمک فرایند لایه سازی به مجموعه هایی کوچکتر تبدیل نموده و تراکم و تراکم عمومی را در لایه های مختلف بررسی می کنیم، به بیان دقیق تر در این روش بجای استفاده از یک مجموعه امکان تولید بزرگ از چند مجموعه امکان تولید کوچک استفاده می شود. به نوعی می توان ایده ای مشابه به بحث برنامه ریزی پویا را بکار گرفت، از این رو بخاطر ارتباط تنگاتنگ این روش ( روش لایه ای استفاده شده در این مقاله ) با روش برنامه ریزی پویا، مولفین پیشنهاد می کنند که در آینده بر روی این ارتباط توجه شده و تمرکز لازم صورت گیرد.

یک مثال عددی نشان می دهد که هر چه مجموعه امکان تولید کوچکتر شود، درجه تراکم عمومی نیز افزایش می یابد. همچنین مثال بکاررفته نشان از وجود واحدهایی دارد که با محدود شدن مجموعه امکان تولید همچنان تراکم خود را حفظ می کنند، که این واحدها مطلوب نیستند.

## منابع

[۱۴] میرفندرسکی، راحله سادات، ۱۳۸۹، تراکم و بازده به مقیاس باتصاویر بهینه چندگانه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائم شهر، پایان نامه کارشناسی ارشد، پیوست الف، ۱۰۵.

- [1] Sueyoshi, T., Sekitani, k., 2009. DEA Congestion and returns to scale under on occurrence of multiple optimal projections. European Journal of operational Research 194, 592-607
- [2] Fare, R., Sven sson, L., 1980. Congestion of production factors. Economet rica 48, 1745-1753.
- [3] Fare, R., Grosskopfs., 1983, Measuring congestion in production, zeit schrift fur Nationaokonomie, 275-271.
- [4] Fare, R., Grosskoph, S., Lovell, C.A.K., 1985. The Measurement of Efficiency of production. kluwer – Nijh off Publishing, Boston, USA.
- [5] Cooper, W.W., Thompson, R.G., Thrall.R.M., 1996, Introduction: extension and new developments in DEA, An nals of operations Research 66, 3-450.
- [6] Brockett, P.L., Cooper, W.W., shin, H.C., Wang, Y., 1998. Inefficiency and congestion in Chinese production befor and after the 1978 economic reforms. Socio –Economic planning Science 32, 1-200.
- [7] Cooper, W.W., Deng, H., Huang, Z.M., Li, S.L., 2002, A one –model approach to congestion in data envelopment analysis European Journal of operational Research 36(4), 231-238.
- [8] Wei, Q.L., Yan, H., 2003, Congestion and returns to Scale in data envelopment analysis, European Journal of operational Research 153, 641-650.
- [9] Tone, K., Sahoo, B.K., 2004. Degree of Scale economies and Congestion: A Unified DEA approach. European Journal of operational Research 158,755-772

- [10] Cooper, W.W., Seiford, L.M., Zhu, J., 2000. A unified additive model approach for evaluating inefficiency and congestion with associated measures in DEA. *Socio –Economic planning Science* 34, 1-25.
- [11] Cooper, W.W., Bisheng, G., Li, S., 2001a. Comparisons and evaluations of alternative approaches to the treatment of Congestion in DEA. *European Journal of operational Research* 132, 62-74.
- [12] Cooper, W.W., Deng, H., Gu, B., Li, S., Thrall, R.m, 2001 b. using DEA to improve the management of congestion in Chinese industries (1981-1997). *Socio – Economic planning Sciences* 35, 1-16.
- [13] Cooper, W.W., Gu, B., Li, S., 2001C. Note: Alternative treatments of Congestion in DEA A response to the Cherchye, Kuosmanen and post critique. *European Journal of operational Research* 132, 81-87.

