

## مساله برنامه‌ریزی درجه دوم با ضرایب فازی: یک روش حل مبتنی بر اصل گسترش

سید هادی ناصری<sup>۱\*</sup>، فاطمه طالشیان جلودار<sup>۲</sup>، نعمت اله تقی نژاد<sup>۳</sup>، فرزانه خلیلی<sup>۴</sup>

۱- استادیار دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

۳- دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۲۰ اردیبهشت ۱۳۹۱

پذیرش مقاله: ۳۰ شهریور ۱۳۹۱

### چکیده

برنامه‌ریزی درجه دوم رده خاصی از مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی است که در آن تابع هدف از نوع درجه دوم و قیود خطی می‌باشند. مدل‌های متداول برنامه‌ریزی درجه دوم نیازمند پارامترهایی معین با مقادیری ثابت هستند. این مدل به طور گسترده برای حل مسایل دنیای واقعی به کار برده می‌شوند. از طرف دیگر دسته گسترده‌ای از مسایل که در زندگی روزمره با آن‌ها سروکار داریم و براساس حل مدل ریاضی ساخته شده از آن تصمیم‌گیری می‌کنیم، مفاهیمی نادقیق و یا مجموعه‌هایی با کران‌های تقریبی می‌باشند. بنابراین مقادیر پارامترهایی که در این مدل‌ها استفاده می‌شوند بر اساس پیش-بینی شرایط آینده تخمین زده می‌شوند، و همواره دارای ابهام و عدم قطعیت می‌باشند. در نتیجه مدل‌سازی این مسایل به صورت مساله برنامه‌ریزی درجه دوم با داده‌های فازی یکی از موضوعات مورد توجه محققین در حوزه تحقیق در عملیات است. در این مقاله روشی برای حل مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم فازی پیشنهاد می‌شود که در آن ضرایب هزینه، ضرایب محدودیت‌ها و بردار سمت راست اعداد فازی هستند. روش مورد نظر برای بهینه‌سازی تابع هدف با به کارگیری از مفاهیم فازی، مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی را به مسایل درجه دوم متداولی تبدیل می‌کند که با استفاده از الگوریتم متداول همچون SQP قابل حل می‌باشند و به ترتیب کران‌های بالا و پایین تابع هدف فازی را در هر سطح  $\alpha$ ،  $\alpha \in [0, 1]$ ، نتیجه می‌دهد. علاوه بر این روش پیشنهاد شده برای حل مسایل کلی‌تری توسعه داده می‌شود که در آن علاوه بر ضرایب هزینه، ضرایب محدودیت‌ها و بردار سمت راست، ضرایب درجه دوم نیز اعداد فازی می‌باشند. در نهایت برای تشریح فرآیند حل و نشان دادن کارایی روش پیشنهاد شده یک مساله بهینه‌سازی فازی ارائه می‌گردد. نتایج به دست آمده گزارش می‌شود.

**کلمات کلیدی:** برنامه‌ریزی درجه دوم، اعداد فازی، برنامه‌ریزی درجه دوم فازی، تابع عضویت،  $\alpha$ -برش، اصل گسترش

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: nasseri@umz.ac.ir

## ۱ مقدمه

برنامه ریزی درجه دوم یکی از مدل‌های ریاضی در تحقیق در عملیات است که برای بهینه‌سازی استفاده از منابع محدود طراحی شده و کاربردهای قابل توجهی در زمینه‌های مختلف علمی دارد که منجر به توسعه‌ی نتایج متعدد مفید شده است. از جمله: مدیریت مالی [۱]، انتخاب portfolio [۲،۳]، مهندسی نقشه کشی [۴،۵]، مطالعه‌ی ملکولی [۶] و اقتصاد [۷].

مطالعات فراوان در این زمینه منجر به توسعه و گسترش الگوریتم‌های کارا و با کفایت برای حل مسایل برنامه ریزی درجه دوم شده است که در آن‌ها پارامترها مقادیری ثابت و معین هستند. در حالی که در کاربردهای دنیای واقعی این تصور برقرار نمی‌باشد. زیرا مدل‌های برنامه ریزی درجه دوم اغلب برای فعالیت‌ها در دوره آتی فرموله می‌شوند. از این رو مقادیر پارامترهایی که در این مدل‌ها استفاده می‌شوند بر اساس پیش‌بینی شرایط آینده است که حتماً دارای درجه‌ای عدم قطعیت می‌باشد و نیز مواردی وجود دارد که نمی‌توان داده‌ها را بدون خطا جمع‌آوری کرد. بنابراین توجه به مدل‌سازی و حل این گونه مسایل از اهمیت خاصی برخوردار است. در چنین مواردی که تعدادی از پارامترها نادقیق یا نامعین می‌باشند، با تخصیص برخی مقادیر قطعی به پارامترهای نادقیق مساله را تبدیل به مساله متداول درجه دوم می‌نماییم. البته این ساده‌سازی اغلب نتایج غلطی را ارایه می‌دهد. یک راه دیگر برای پردازش پارامترهای نادقیق توزیع احتمالات است. اما توزیع احتمالات نیاز به ساختار قابل پیش‌بینی از قبل و مطابق با قواعد دارد که در نمونه‌های واقعی غیرممکن است. برای این که به‌طور کمی با اطلاعات نادقیق در تصمیم‌گیری سروکار داشته باشیم، زاده مفهوم فازی را معرفی کرد [۸]. نظریه فازی به‌طور گسترده در بهینه‌سازی مسایل خطی و غیر خطی به‌کار گرفته می‌شود [۶، ۹-۱۶]. در این مقاله رده خاصی از مسایل برنامه ریزی درجه دوم فازی که در آن برخی از پارامترهای ورودی مساله به‌صورت اعداد فازی می‌باشند مورد بررسی قرار گرفته می‌شود. در بخش بعد به ماهیت مسایل برنامه ریزی درجه دوم و مسایل برنامه ریزی درجه دوم فازی می‌پردازیم. در بخش ۳، روشی دو مرحله‌ای برای حل مسایل برنامه ریزی درجه دوم فازی ارایه می‌شود که قادر به محاسبه‌ی مقدار فازی هدف می‌باشد. در مرحله اول این روش یک زوج از مسایل دو سطحی برای یافتن کران بالا و کران پایین مقدار هدف فازی فرموله می‌شود، سپس در مرحله دوم مسایل دو سطحی به مسایل متداول یک سطحی تبدیل خواهند شد. در ادامه با ارایه مثال عددی در بخش ۴، نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان مفهوم فوق را به مسایل برنامه ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی اعمال کرد. بخش ۵ نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

## ۲ تعریف مساله

مساله برنامه ریزی درجه دوم یک مساله بهینه‌سازی شامل تابع هدف غیرخطی و قیود خطی می‌باشد که شکل کلی آن به‌صورت زیر است [۱۷]:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j \\ \text{s.t.} & \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

که در آن  $X = (x_j : j = 1, \dots, n)$  بردار متغیرهای تصمیم‌گیری است که باید تعیین شوند و بقیه‌ی پارامترها، مقادیری هستند که در مساله داده شده‌اند:  $C = (c_j : j = 1, \dots, n)$  بردار ضرایب هزینه،  $b = (b_i : i = 1, \dots, m)^T$  بردار سمت راست،  $Q = (q_{ij})_{m \times n}$  ماتریس درجه دوم،  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  ماتریس ضرایب محدودیت‌ها می‌باشند. در این مقاله ماتریس  $Q$  متقارن و نیمه‌معین مثبت در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از این نمادگذاری می‌توان مساله بالا را به صورت ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= Cx + \frac{1}{\gamma} x'Qx \\ \text{s.t.} & \\ Ax &\leq b, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

که در آن هدف پیدا کردن متغیرهای تصمیم‌گیری تحت قیود می‌باشد به طوری که تابع هدف  $\min$  شود. مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم‌گیری  $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$  تابعی از پارامترهای  $a_{ij}, b_i, c_j, j = 1, \dots, n$  و  $i = 1, \dots, m$  هستند. بنابراین با تغییر هر یک از این پارامترها، متغیرهای تصمیم‌گیری و در نتیجه مقدار بهینه تابع هدف متناسب با آن تغییر خواهد کرد. بنابراین زمانی که برخی از پارامترها در مساله اعداد فازی باشند، مقدار بهینه تابع هدف نیز فازی خواهد بود و مساله برنامه‌ریزی متداول درجه دوم تعریف شده در (۱) تبدیل به مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی می‌شود که شکل کلی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Min } \tilde{z} &= \sum_{j=1}^n \tilde{C}_j \tilde{x}_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{Q}_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \\ \text{s.t.} & \\ \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} \tilde{x}_j &\leq \tilde{B}_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \tilde{x}_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3}$$

که در آن  $\tilde{x}_j, j = 1, \dots, n$ ، متغیرهای تصمیم گیری در حالت های فازی می باشند.  $\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_i, \tilde{C}_j$  و  $\tilde{Q}_{ij}$  اعدادی فازی می باشند که توابع عضویت آن ها به ترتیب  $\mu_{\tilde{A}_{ij}}, \mu_{\tilde{B}_i}, \mu_{\tilde{C}_j}$  و  $\mu_{\tilde{Q}_{ij}}$  در زیر تعریف شده اند:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}_{ij}} &= \left\{ \left( a_{ij}, \mu_{\tilde{A}_{ij}}(a_{ij}) \right) \mid a_{ij} \in S(\tilde{A}_{ij}) \right\} \\ \mu_{\tilde{B}_i} &= \left\{ \left( b_i, \mu_{\tilde{B}_i}(b_i) \right) \mid b_i \in S(\tilde{B}_i) \right\} \\ \mu_{\tilde{C}_j} &= \left\{ \left( c_j, \mu_{\tilde{C}_j}(c_j) \right) \mid c_j \in S(\tilde{C}_j) \right\} \\ \mu_{\tilde{Q}_{ij}} &= \left\{ \left( q_{ij}, \mu_{\tilde{Q}_{ij}}(q_{ij}) \right) \mid q_{ij} \in S(\tilde{Q}_{ij}) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

در روابط (4)،  $S(\tilde{A}_{ij}), S(\tilde{B}_i), S(\tilde{C}_j)$  و  $S(\tilde{Q}_{ij})$  به ترتیب تکیه گاه های اعداد فازی  $\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_i, \tilde{C}_j$  و  $\tilde{Q}_{ij}$  هستند. در این جا به جای بررسی این حالت کلی، مساله برنامه ریزی درجه دوم فازی را در دو حالت ساده تر زیر مورد بررسی قرار خواهیم داد:

۱. مساله برنامه ریزی درجه دوم فازی که در آن ضرایب هزینه، ضرایب محدودیت ها و بردار منابع اعدادی فازی می باشند.

$$\begin{aligned} \text{Min } \tilde{z} &= \sum_{j=1}^n \tilde{C}_j x_j + \frac{1}{\psi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j \\ \text{s.t.} & \\ \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j &\leq \tilde{B}_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

۲. مساله برنامه ریزی درجه دوم فازی که در آن علاوه بر ضرایب هزینه، ضرایب محدودیت ها و بردار منابع، ضرایب درجه دوم نیز مقادیری فازی می باشند.

$$\begin{aligned} \text{Min } \tilde{z} &= \sum_{j=1}^n \tilde{C}_j x_j + \frac{1}{\psi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{Q}_{ij} x_i x_j \\ \text{s.t.} & \\ \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j &\leq \tilde{B}_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

از آن جایی که در مدل‌های اخیر برخی از پارامترهای ورودی مساله مقادیری فازی می‌باشند، مقدار بهینه تابع هدف نیز فازی خواهد بود. در بخش بعد با یافتن مقادیر کران بالا و کران پایین تابع هدف در هر سطح  $\alpha$ ،  $\alpha \in [0, 1]$  مقدار بهینه فازی را برای هر یک از مسایل (۵) و (۶) محاسبه می‌نماییم.

### ۳ روش حل

در این بخش ابتدا روشی برای حل مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی (۵) ارائه می‌کنیم و سپس آن را به مسایل کلی‌تر بیان شده توسط مدل (۶) تعمیم می‌دهیم. در این روش ابتدا برای هر مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی یک زوج از مسایل دوسطحی فرموله می‌شود که به ترتیب کران بالا و کران پایین مقدار بهینه فازی را در هر سطح  $\alpha$ ،  $\alpha \in [0, 1]$  نتیجه می‌دهند. سپس با به کارگیری قضیه دوگانگی و در نظر گرفتن قیود مساله داخلی و خارجی به طور هم‌زمان هر یک از این مسایل دوسطحی به یک مساله متداول یک‌سطحی تبدیل می‌شود. در نهایت با حل مسایل یک‌سطحی اخیر، جواب مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی به دست می‌آید.

### ۳-۱ یافتن مسایل دو سطحی

از آن جایی که در مدل (۵) پارامترهای  $a_{ij}$ ،  $b_i$  و  $c_j$  مقادیری فازی می‌باشند، مقدار بهینه تابع هدف نیز فازی خواهد بود. بر اساس اصل گسترش زاده تابع عضویت مقدار بهینه فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{z}}(z) = \sup_{a,b,c} \text{Min} \left\{ \mu_{\tilde{A}_{ij}}(a_{ij}), \mu_{\tilde{B}_i}(b_i), \mu_{\tilde{C}_j}(c_j), \forall i, j \mid z = Z(a, b, c) \right\} \quad (7)$$

که در آن  $z = Z(a, b, c)$  تابع مساله درجه دوم متداول است که در (۱) تعریف شده است. بر اساس رابطه (۷) برای این که  $\mu_{\tilde{z}}(z) = \alpha$  باشد، باید  $\mu_{\tilde{A}_{ij}}(a_{ij}) \geq \alpha$ ،  $\mu_{\tilde{B}_i}(b_i) \geq \alpha$  و  $\mu_{\tilde{C}_j}(c_j) \geq \alpha$  باشند. همچنین باید حداقل یکی از  $\mu_{\tilde{A}_{ij}}$ ،  $\mu_{\tilde{B}_i}$  و  $\mu_{\tilde{C}_j}$  برابر  $\alpha$  باشند. برای پیدا کردن تابع عضویت  $\mu_{\tilde{z}}$ ، کافی است تابع سمت راست و تابع سمت چپ را که به ترتیب معادل کران بالای تابع هدف  $z_{\alpha}^u$  و کران پایین تابع هدف  $z_{\alpha}^l$  در سطح  $\alpha$  می‌باشند، بیابیم. چون  $Z_{\alpha}^u$  حداکثر  $Z(a, b, c)$  و  $z_{\alpha}^l$  کمینه  $Z(a, b, c)$  می‌باشند داریم:

$$z_{\alpha}^u = \text{Max} \left\{ Z(a, b, c) \mid (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u, (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u, (C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u, \forall i, j \right\} \quad (8)$$

$$z_{\alpha}^l = \text{Min} \left\{ Z(a, b, c) \mid (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u, (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u, (C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u, \forall i, j \right\} \quad (9)$$

در نتیجه مقادیر  $a_{ij}$ ،  $b_i$  و  $c_j$  که بیشترین مقدار را به تابع هدف می دهند از مساله برنامه ریزی دوسطحی زیر به دست می آیند:

$$\begin{array}{l} \text{Max} \\ (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u \\ z_{\alpha}^u = (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u \\ (C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u \\ \forall i, j \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (10)$$

هم چنین برای یافتن مقادیر  $a_{ij}$ ،  $b_i$  و  $c_j$  که کمترین مقدار تابع هدف را تولید می کنند، یک مساله ریاضی دو سطحی با قرار دادن min به جای max در مساله (10) فرموله می شود که به صورت زیر است:

$$\begin{array}{l} \text{Min} \\ (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u \\ z_{\alpha}^l = (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u \\ (C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (11)$$

به طور مشابه حالت قبل با استفاده از اصل گسترش زاده تابع عضویت مقدار هدف  $\tilde{z}$ ، برای مدل (6) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{z}}(z) = \sup_{a,b,c} \text{Min} \left\{ \mu_{\tilde{A}_{ij}}(a_{ij}), \mu_{\tilde{B}_i}(b_i), \mu_{\tilde{C}_j}(c_j), \mu_{\tilde{Q}_{ij}}(q_{ij}) \quad \forall i, j \mid z = Z(a, b, c) \right\} \quad (12)$$

به وضوح مقادیر متفاوت  $a_{ij}$ ،  $b_i$ ،  $c_j$  و  $q_{ij}$  مقادیر متفاوت تابع هدف را تولید می کند. برای یافتن بازه مقدار هدف فازی در یک سطح  $\alpha$ ، کافی است که کران بالا و کران پایین تابع هدف در مدل (6) به دست آورده شود.

$$z_{\alpha}^u = \text{Max} \{ Z(a, b, c) \mid (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u, (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u, (C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u, (Q_{ij})_{\alpha}^l \leq q_{ij} \leq (Q_{ij})_{\alpha}^u, \forall i, j \} \quad (13)$$

$$z_{\alpha}^l = \text{Min} \{ Z(a, b, c) \mid (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u, (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u, (C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u, (Q_{ij})_{\alpha}^l \leq q_{ij} \leq (Q_{ij})_{\alpha}^u, \forall i, j \} \quad (14)$$

بدیهی است که مقادیر  $a_{ij}$ ،  $b_i$ ،  $c_j$  و  $q_{ij}$ ، که بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع هدف را تولید می کنند به ترتیب از مسایل برنامه ریزی دوسطحی (۱۵) و (۱۶) به دست می آیند:

$$\begin{array}{l}
 \text{Max} \\
 \left. \begin{array}{l}
 (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u \\
 (Q_{ij})_{\alpha}^l \leq q_{ij} \leq (Q_{ij})_{\alpha}^u \\
 z_{\alpha}^u = (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u \\
 (C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u \\
 \forall i, j
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j \\
 \text{s.t.} \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
 x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{array} \quad (15)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Min} \\
 \left. \begin{array}{l}
 (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u \\
 (Q_{ij})_{\alpha}^l \leq q_{ij} \leq (Q_{ij})_{\alpha}^u \\
 z_{\alpha}^l = (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u \\
 (C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u \\
 \forall i, j
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j \\
 \text{s.t.} \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
 x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{array} \quad (16)
 \end{array}$$

در هر یک از مسایل (۱۰) و (۱۱)، مساله داخلی مقدار هدف را برای هر  $a_{ij}$ ،  $b_i$  و  $c_j$ ، مشخص شده از مساله خارجی، محاسبه می کند. در حالی که مساله خارجی مقادیر  $a_{ij}$ ،  $b_i$  و  $c_j$ ، را تعیین می کند که کوچکترین مقدار تابع هدف را تولید می کند. هم چنین در هر یک از مسایل (۱۵) و (۱۶)، مساله داخلی مقدار هدف را برای هر  $a_{ij}$ ،  $b_i$ ،  $c_j$  و  $q_{ij}$ ، مشخص شده از مساله خارجی، محاسبه می کند. در حالی که مساله خارجی مقادیر  $a_{ij}$ ،  $b_i$ ،  $c_j$  و  $q_{ij}$ ، را تعیین می کند که کوچکترین مقدار تابع هدف را تولید می کند. این مسایل در شکل اخیر قابل حل نیستند. در ادامه چگونگی تبدیل این مسایل به مسایل متداول یک سطحی مورد بحث قرار خواهد گرفت.

### ۳-۲ تبدیل مسایل دوسطحی به مسایل یک سطحی

#### ۳-۲-۱ کران بالا

۳-۲-۱-۱ پیش از این نشان داده شد که برای پیدا کردن کران بالای مقدار هدف مساله برنامه ریزی درجه دوم (۵)، کافی است مساله ریاضی دوسطحی (۱۰) حل شود. در حالی که حل مدل (۱۰) به دلیل هم نوع نبودن توابع هدف مسایل داخلی و خارجی (یکی کمینه سازی و دیگری بیشینه سازی) ساده نمی باشد. بنابراین با دوگان گیری از مساله داخلی، توابع هدف را هم نوع می کنیم. دوگان لاگرانژی مساله (۱)، به صورت زیر است [۱۸]:

$$\theta(\lambda, \xi) = \text{Max inf}_{\lambda, \xi \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{\sqrt{}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j x_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) - \sum_{j=1}^n \xi_j x_j \right\} \quad (17)$$

از آن جا که ماتریس  $Q$ ، در (۱) متقارن و نیمه معین مثبت می باشد، برای  $\lambda$  و  $\xi$  داده شده تابع

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{\sqrt{}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j x_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) - \sum_{j=1}^n \xi_j x_j$$

محدب است. بنابراین شرط لازم و کافی برای کمینه سازی این است که گرادیان صفر باشد. یعنی:

$$c_j + \sum_{i=1}^n q_{ij} x_i + \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i - \xi_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (18)$$

بنابراین دوگان مساله داخلی به صورت زیر است:

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{\sqrt{}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j x_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) - \sum_{j=1}^n \xi_j x_j$$

(19)

st.

$$c_j + \sum_{i=1}^n q_{ij} x_i + \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i - \xi_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\lambda_i, \xi_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

با توجه به رابطه (۱۸) داریم:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n \xi_j x_j = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j$$

باجایگذاری رابطه ی بالا در (۱۹) دوگان لاگرانژی مساله داخلی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\text{Max } Z = - \frac{1}{\sqrt{}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j x_i - \sum_{i=1}^m b_i \lambda_i$$

(20)

st.

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} x_i + \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i - \xi_j = -c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\lambda_i, \xi_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

بر اساس قضیه دوگانگی اگر مساله‌ای بیکران باشد، دوگان آن نشدنی است. به علاوه اگر هر دو مساله شدنی باشند آن گاه هر دوی آن‌ها جواب‌های بهینه یکسان دارند. به بیان دیگر مدل (۱۰) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\begin{array}{l}
 \text{Max} \\
 \left. \begin{array}{l}
 (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u \\
 z_{\alpha}^u = (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u \\
 (C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u \\
 \forall i, j
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{Max } Z = -\frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j x_i - \sum_{i=1}^m b_i \lambda_i \\
 \text{s.t.} \\
 \sum_{i=1}^n q_{ij} x_i + \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i - \xi_j = -c_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
 \lambda_i, \xi_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{array} \quad (21)
 \end{array}$$

حال هر دو مساله داخلی و خارجی عملگر بیشینه‌سازی دارند و می‌توان آن را با در نظر گرفتن قيود به طور هم‌زمان به یک مساله یک‌سطحی به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\begin{array}{l}
 z_{\alpha}^u = \text{Max}_{x, \lambda, \xi} Z = -\frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j x_i - \sum_{i=1}^m b_i \lambda_i \\
 \text{s.t.} \\
 \sum_{i=1}^n q_{ij} x_i + \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i - \xi_j = -c_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
 (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \\
 (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u, \quad j = 1, \dots, n, \\
 (C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u, \quad j = 1, \dots, n, \\
 \lambda_i, \xi_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m,
 \end{array} \quad (22)$$

چون  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m$  داریم:

$$(B_i)_{\alpha}^l \lambda_i \leq b_i \lambda_i \leq (B_i)_{\alpha}^u \lambda_i, \quad j = 1, \dots, n$$

بنابراین برای دست یافتن به بیشترین مقدار تابع هدف باید پارامترهای  $b_i, i = 1, \dots, m$ ، کران پایین خود را اختیار کنند. به علاوه برای تبدیل این مدل به مساله برنامه‌ریزی درجه دوم متداول باید تعداد عوامل غیرخطی کاهش داده شود. در نتیجه با ضرب رابطه  $(A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u$  در  $\lambda_i$  برای هر  $i = 1, \dots, m$  و تغییر متغیر  $a_{ij} \lambda_i = r_{ij}$ ، مساله (۱۰) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$z_{\alpha}^u = \text{Max}_{x, \lambda, \xi} Z = -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j x_i - \sum_{i=1}^m (B_i)_{\alpha}^l \lambda_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} x_i + \sum_{i=1}^m r_{ij} - \xi_j = -c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (23)$$

$$(A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\lambda_i, \xi_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m.$$

این مساله یک مساله درجه دوم متداول است که جواب بهینه آن کران بالای جواب مساله فازی درجه دوم (۵) است.

۳-۲-۱ برای پیدا کردن کران بالای مقدار هدف مساله برنامه ریزی درجه دوم مدل (۶)، کافی است مساله ریاضی دوسطحی (۱۵) حل شود. به وضوح برای  $x_i x_j \geq 0$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$(Q_{ij})_{\alpha}^l x_i x_j \leq q_{ij} x_i x_j \leq (Q_{ij})_{\alpha}^u x_i x_j, \quad (C_j)_{\alpha}^l x_j \leq c_j x_j \leq (C_j)_{\alpha}^u x_j \quad (24)$$

بنابراین حداکثر مقدار تابع هدف در (۱۵) زمانی حاصل خواهد شد که پارامترهای  $c_j$  به ازای هر  $j$ ،  $q_{ij}$  به ازای هر  $i, j$  به ترتیب کران‌های بالای خود  $(C_j)_{\alpha}^u$  و  $(Q_{ij})_{\alpha}^u$  را اختیار کنند. یعنی مدل (۱۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{Max} \left\{ \begin{array}{l} (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u \\ z_{\alpha}^u = (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u \\ \forall i, j \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = \sum_{j=1}^n (C_j)_{\alpha}^u x_j + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Q_{ij})_{\alpha}^u x_i x_j \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

در مدل اخیر نیز توابع هدف هم‌نوع نمی‌باشند. در نتیجه همانند قسمت قبل با دوگان‌گیری از مساله داخلی و تبدیل آن به مساله از نوع بیشینه‌سازی می‌توان توابع هدف را هم‌نوع نمود. بنابراین مساله برنامه ریزی درجه دوم (۱۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \\
 & \left. \begin{aligned}
 & (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u \\
 & z_{\alpha}^u = (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u \\
 & \forall i, j
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 & \text{Max}_{x, \lambda, \xi} z = -\sum_{i=1}^m b_i \lambda_i - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Q_{ij})_{\alpha}^u x_i x_j \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^n (Q_{ij})_{\alpha}^u x_i + \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i - \xi_j = -c_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \lambda_i, x_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \quad (25)
 \end{aligned}$$

حال عملگرهای هر دو مساله داخلی و خارجی از نوع بیشینه‌سازی می‌باشند. بنابراین با در نظر گرفتن قيود به‌طور هم‌زمان، مساله دوسطحی اخیر به مساله‌ای یک‌سطحی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & Z_{\alpha}^u = \text{Max}_{x, \lambda, \xi} z = -\sum_{i=1}^m b_i \lambda_i - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Q_{ij})_{\alpha}^u x_i x_j \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^n (Q_{ij})_{\alpha}^u x_i + \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i - \xi_j = -c_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u, \\
 & (B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u, \\
 & \lambda_i, x_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \quad (26)$$

از آن‌جا که  $\lambda_i \geq 0$  داریم:

$$(B_i)_{\alpha}^l \lambda_i \leq b_i \lambda_i \leq (B_i)_{\alpha}^u \lambda_i, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

برای دست یافتن به بیشترین مقدار تابع هدف، پارامترهای  $b_i$  به‌ازای  $i = 1, \dots, m$  باید کران پایین خود را اختیار کنند. به‌علاوه می‌توان با ضرب  $(A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u$  در  $\lambda_i$ ،  $i = 1, \dots, m$  و قرار دادن  $a_{ij} \lambda_i = r_{ij}$  عامل غیرخطی  $a_{ij} \lambda_i$  را از بین برد.

$$\begin{aligned}
 & Z_{\alpha}^u = \text{Max}_{x, \lambda, \xi} z = -\sum_{i=1}^m (B_i)_{\alpha}^l \lambda_i - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Q_{ij})_{\alpha}^u x_i x_j \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^n (Q_{ij})_{\alpha}^u x_i + \sum_{i=1}^m r_{ij} - \xi_j = -(C_j)_{\alpha}^u, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (A_{ij})_{\alpha}^l \lambda_i \leq r_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u \lambda_i, \\
 & \lambda_i, x_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \quad (27)$$

این مساله یک مساله درجه دوم متداول است که مقدار بهینه آن یک بهینه‌ی سراسری است. جواب بهینه  $Z_{\alpha}^u$  کران بالای جواب مساله فازی درجه دوم (۶) است.

### ۳-۲-۲ کران پایین

۳-۲-۲-۱ چون هر دو مساله داخلی و خارجی در (۱۱) عملگر کمینه سازی دارند می توان با در نظر گرفتن قیود آن به طور هم زمان آن را به مساله متداول یک سطحی تبدیل کرد:

$$Z_{\alpha}^u = \text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$(A_{ij})_{\alpha}^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_{\alpha}^u, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (28)$$

$$(B_i)_{\alpha}^l \leq b_i \leq (B_i)_{\alpha}^u, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

از آن جا که  $x_j \geq 0$  از رابطه  $(C_j)_{\alpha}^l \leq c_j \leq (C_j)_{\alpha}^u$  داریم:

$$(C_j)_{\alpha}^l x_j \leq c_j x_j \leq (C_j)_{\alpha}^u x_j$$

برای به دست آوردن کمترین مقدار تابع هدف، پارامترهای فازی  $c_j$ ،  $j = 1, \dots, n$  باید کرانهای پایین خود را

اتخاذ نمایند. یعنی باید تابع هدف از  $\sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j$  به  $\sum_{j=1}^n (C_j)_{\alpha}^l x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j$

تغییر یابد. به علاوه ناحیه شدنی که توسط قیود نامساوی  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$  به وجود می آید زمانی به وسیع ترین حد

خود دست می یابد که پارامترهای  $b_i$  کرانهای بالای خود،  $(B_i)_{\alpha}^u$  و پارامترهای  $a_{ij}$  کرانهای پایین خود،

$(A_{ij})_{\alpha}^l$  را اختیار کنند. بنابراین مدل (۲۸) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$Z_{\alpha}^l = \text{Min}_x z = \sum_{j=1}^n (C_j)_{\alpha}^l x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n (A_{ij})_{\alpha}^l x_j \leq (B_i)_{\alpha}^u, \quad i = 1, \dots, m, \quad (29)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

مدل (۲۹) یک مساله برنامه ریزی درجه دوم متداول است که تابع هدف آن محدب و محدودیت‌ها خطی می‌باشند. بنابراین کران پایین به دست آمده یک جواب بهینه سراسری است.

۲-۲-۲-۳ برای جستجوی کمترین مقدار تابع هدف در (۱۶) باید به جای پارامترهای  $c_j$ ، به ازای هر  $j$  و  $q_{ij}$  به ازای هر  $i, j$  به ترتیب کران‌های پایین آن‌ها  $(C_j)_\alpha^l$  و  $(Q_{ij})_\alpha^l$  را قرار دهیم. زیرا:

$$\sum_{j=1}^n (C_j)_\alpha^l x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Q_{ij})_\alpha^l x_i x_j \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j \leq \sum_{j=1}^n (C_j)_\alpha^u x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Q_{ij})_\alpha^u x_i x_j$$

بنابراین مدل (۱۶) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{array}{l} \text{Min} \\ (A_{ij})_\alpha^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_\alpha^u \\ z_\alpha^l = (B_i)_\alpha^l \leq b_i \leq (B_i)_\alpha^u \\ \forall i, j \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = \sum_{j=1}^n (C_j)_\alpha^l x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Q_{ij})_\alpha^l x_i x_j \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (30)$$

به طریق مشابه این مساله می‌تواند با در نظر گرفتن قيود آن به طور هم‌زمان، به مساله متداول یک‌سطحی به صورت زیر تبدیل شود:

$$\begin{array}{l} Z_\alpha^l = \text{Min}_x \quad z = \sum_{j=1}^n (C_j)_\alpha^l x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Q_{ij})_\alpha^l x_i x_j \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ (A_{ij})_\alpha^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_\alpha^u, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ (B_i)_\alpha^l \leq b_i \leq (B_i)_\alpha^u, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \quad (31)$$

هم چنین با اختیار  $(B_i)_\alpha^u$  و  $(A_{ij})_\alpha^l$  به ترتیب به جای پارامترهای  $b_i$  و  $a_{ij}$  ناحیه‌ی شدنی که توسط قیود نامساوی  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$  به وجود می‌آید، به وسیع‌ترین حد خود دست می‌یابد. بنابراین مدل (۲۸) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Z_\alpha^l = \underset{x}{\text{Min}} \quad z = \sum_{j=1}^n (C_j)_\alpha^l x_j + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Q_{ij})_\alpha^l x_i x_j$$

(۳۲)

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n (A_{ij})_\alpha^l x_j \leq (B_i)_\alpha^u, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

این مدل نیز یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم متداول است که تابع هدف آن یک تابع محدب است و محدودیت‌ها نیز خطی می‌باشند. بنابراین کران پایین به دست آمده یک جواب بهینه سراسری است. بنابراین با حل هر زوج از مدل‌های (۲۳) و (۲۹)، (۲۷) و (۳۲) می‌توان بازه  $[Z_\alpha^l, Z_\alpha^u]$  را که مقدار بهینه مساله درجه دوم فازی در آن قرار دارد، به ترتیب برای مسایل درجه دوم فازی (۵) و (۶) به دست آورد. در بخش بعد مفاهیم بیان شده در این مقاله را برای حل یک مثال عددی به کار خواهیم گرفت.

## ۴ مثال عددی

در این بخش با حل یک مثال عددی چگونگی اعمال این روش به مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم فازی را نشان خواهیم داد. مساله برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min} \quad z = (-6, 2, 1)x_1 + (5, 2, 2)x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + 1/5x_2^2$$

(۳۳)

$$s.t. \quad (3, 1, 0/5)x_1 + (5, 1, 2)x_2 \leq (7, 1, 1/5)$$

$$(4, 1, 1)x_1 \leq (5, 2, 2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

در مساله برنامه‌ریزی (۳۳) ضرایب خطی تابع هدف، ضرایب محدودیت‌ها و بردار منابع اعداد فازی مثلثی می‌باشند. بنابراین کران بالا و کران پایین تابع هدف در هر سطح به ترتیب با حل مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم فازی (۳۴) و (۳۵) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 Z_{\alpha}^u = \text{Max} \quad & z = -x_1^y - x_1 x_2 - 1/5 x_2^y - (\alpha + 6) \lambda_1 - (2\alpha + 3) \lambda_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \\
 & 2x_1 + x_2 + r_{11} + r_{12} - \xi_1 = -c_1 \\
 & 1x_1 + 3x_2 + r_{21} + r_{22} - \xi_2 = -c_2 \\
 & (2 + \alpha) \lambda_1 \leq r_{11} \leq (3/5 - 2\alpha) \lambda_1 \\
 & (\alpha - 6) \lambda_1 \leq r_{12} \leq (-3 - 2\alpha) \lambda_1 \\
 & (3 + \alpha) \lambda_2 \leq r_{21} \leq (5 - \alpha) \lambda_2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \\
 & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\
 & \xi_1, \xi_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{34}$$

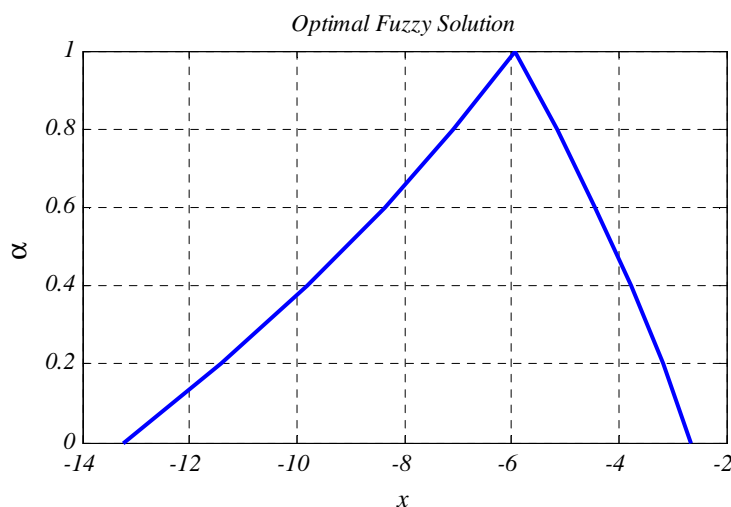
$$\begin{aligned}
 Z_{\alpha}^l = \text{Max} \quad & z = x_1^y + x_1 x_2 + 1/5 x_2^y + (2\alpha - 8) x_1 + (2\alpha + 3) x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \\
 & (\alpha + 2) x_1 + (\alpha - 6) x_2 \leq (7/5 - 0/5 \alpha) \\
 & (3 + \alpha) x_1 \leq (-2\alpha + 7) \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

مسائل (۳۴) و (۳۵)، مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم کلاسیک می‌باشند که به ترتیب مقادیر کران بالا و کران پایین تابع هدف را در هر سطح  $\alpha$ ، نتیجه می‌دهند. مقادیر بهینه این زوج از مسایل برنامه‌ریزی کلاسیک در شش سطح مختلف  $\alpha$  در جدول (۱) لیست شده‌است:

جدول ۱. مقادیر کران بالا و کران پایین تابع هدف در هر سطح آلفا

$\alpha$	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
$Z_{\alpha}^l$	-۱۳/۲۲۲۲۲	-۱۱/۴۲	-۹/۸۰۴۲	-۸/۳۵۹۹	-۷/۰۷۵۳	-۵/۹۳۷۵
$Z_{\alpha}^u$	-۲/۶۴	-۳/۱۸۱۶	-۳/۷۷۸۴	-۴/۴۳۴۳	-۵/۱۵۲۸	-۵/۹۳۷۵

تابع عضویت  $\mu_{\bar{z}}$ ، در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱. نمودار تابع عضویت فازی

## ۵ نتیجه گیری

در این مقاله مسایل برنامه ریزی درجه دوم با پارامترهای نادقیق (فازی) مورد بحث قرار گرفته و روش حلی برای یافتن جواب بهینه آن ارایه شده. در روش یاد شده و هم چنین در اغلب روش های موجود درجه عضویت نقاط مختلف یک عدد فازی در نظر گرفته نمی شود و تنها نقاطی در محاسبات دخالت داده شدند که دارای تابع عضویتی بیشتر یا مساوی  $\alpha$  هستند. حتی در حالت اخیر نیز درجه عضویت نقاط تاثیری بر جواب بهینه ندارد. انتظار می رود با مطالعه بیشتر، نتایج عددی نیز به شکل رسمی گزارش شود.

## منابع

- [1] Abdel-Malek, L. L., Areeractch, N., (2007). A quadratic programming approach to the multi-product newsvendor problem with side constraints. *European Journal of Operational Research*, 176, 855-861.
- [2] Ammar, E., Khalifa, H. A., (2003). Fuzzy portfolio optimization, A quadratic programming approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 18, 1045-1054.
- [3] Zhang, W. G., Nie, Z. K., (2005). On admissible efficient portfolio selection policy. *Applied Mathematics and Computation*, 169, 608-623.
- [4] Dwyer, T., Koren, Y., Marriott, K., (2006). Drawing directed graphs using quadratic programming. *IEEE Trans Vis Compute Graph*, 12(4), 536-548.
- [5] Petersen, J. A. M., Bodson, M., (2006). Constrained quadratic programming techniques for control allocation. *IEEE Transaction Control Systems Technology*, 14, 91-98.
- [6] Pavlovi, L., Divni, T., (2007). A quadratic programming approach to the Randi index. *European Journal of Operational Research*, 176, 435-444.
- [7] Schwars, H. G., (2006). Economic material-product chain models: current status, further development and an illustrative example. *Ecol Economy*, 58, 373-392.
- [8] Zadeh, L. A., (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 13-28.
- [9] Ammar, E., (2003). Interactive stability of multiobjective NLP problems with fuzzy parameters in the objective functions and constraints. *Fuzzy Sets and Systems*, 109, 83-90.
- [10] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M., (1993). *Nonlinear programming: theory and algorithm*. Second ed. New York: John Wiley & Sons.

- [11] Chen, S. P., (2004). Parametric nonlinear programming for analyzing fuzzy queues with finite capacity. *European Journal of Operational Research*, 38, 429-438.
- [12] Liu, S. T., (2004). Fuzzy geometric programming approach to a fuzzy machining economics model. *Int. J. Prod. Res.* 42, 3253-3269.
- [13] Nasser, S. H., Taleshian, F., Alizadeh, Z., Vahidi, J., (2012). A New Method for Ordering LR Fuzzy Number. *The Journal of Mathematics and Computer Science*, 4(3), 283 - 294.
- [14] Sakawa, M., (1993). *Fuzzy set and interactive multi-objective optimization*. New York: Plenum Press.
- [15] Soleimani-damaneh, M., (2006). Fuzzy upper bounds and their applications. *Chaos, Solitons & Fractals*, 6, 42.
- [16] Stefanini, L., Sorini, L., Guerra, M. L., (2006). Soliton of fuzzy dynamical systems using the LU-representation of fuzzy numbers. *Chaos, Solitons & Fractals*, 29, 638-52.
- [17] Luenberger, D., (2008). *Linear and nonlinear programming*. Third Edition, Springer, New York.
- [18] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., Sherali, H. D., (1990). *Linear programming and network Flows*. Second Edition, John Wiley, New York.