

## مدل سازی جیره دام در شرایط عدم قطعیت با استفاده از رویکرد سیستم های خاکستری

سید هادی ناصری\*<sup>۱</sup>، داود درویشی سلوکلائی<sup>۲</sup>

۱-استادیار، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۲۶ خرداد ۱۳۹۴

پذیرش مقاله: ۷ آبان ۱۳۹۴

### چکیده

برنامه ریزی خطی یکی از روش های مناسب به منظور تنظیم جیره خوراکی دام با کم ترین هزینه می باشد. از آن جا که اغلب داده ها تجربی، نادقیق و تقریبی هستند از مدل های فازی و بازه ای استفاده شده تا جیره تنظیمی از انعطاف پذیری لازم برخوردار باشد. زمانی که داده ها کم و یا ناقص باشند، به دنبال یک جواب منحصر به فرد برای مساله باشیم و یا پیدا کردن تابع عضویت برای خبره مشکل باشد، استفاده از یک روش مناسب جهت برآوردن این مشکل بدیهی است. هدف اصلی این پژوهش معرفی رویکردی جدید برای مساله جیره نویسی در شرایط عدم قطعیت بوده است که بسیار کاربردی و مناسب تر باشد. در این مطالعه تلاش شد تا جیره خوراکی مزرعه پرورش جوجه گوشتی در محیط خاکستری انجام شده و نتایج آن با مدل های برنامه ریزی خطی، برنامه ریزی خطی بازه ای، برنامه ریزی خطی فازی مقایسه شوند. با این روش می توان جواب های بهینه متفاوتی با توجه به نوسان قیمت مواد خوراکی یا موجودی به دست آورد. به ویژه مطالعه مدل های یاد شده نشان داد با به کارگیری روش های پایه ای برنامه ریزی خطی و نیز با توسعه نتایج موجود می توان امکان تحلیل حساسیت پارامترهای مدل در شرایط عدم قطعیت را نیز فراهم کرد.

**کلمات کلیدی:** اعداد خاکستری، برنامه ریزی خطی، برنامه ریزی خطی خاکستری، جیره خوراکی، عدم قطعیت.

### ۱ مقدمه

هزینه خوراک دام حدود ۶۵ تا ۷۵ درصد هزینه های دامداری را شامل می شود. کاهش قیمت تمام شده خوراک مصرفی دام، با توجه به محدودیت منابع خوراکی در هر منطقه یا فصل و همچنین، نیاز به صرفه جویی در مصرف علوفه مساله بهینه سازی برنامه تغذیه دام امری ضروری می باشد. اهمیت این موضوع همواره مورد توجه

\*عهددار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: nasseri@umz.ac.ir

پژوهشگران و از جمله اقتصاددانان قرار گرفته و منجر به ابداع راه هایی برای کاهش هزینه در این واحدها شده است؛ بنابراین آشنایی با ترکیبات، کیفیت و نوع مواد خوراکی و احتیاجات خوراکی دام و اصول و استانداردهای مربوطه و مجاز بسیار مهم خواهد بود. از اوایل دهه ۱۹۵۰ کارشناسان علوم تغذیه دام و طیور با به کارگیری روش برنامه ریزی خطی اقدام به جیره نویسی می کردند [۱]. در تنظیم جیره خوراکی با حداقل قیمت، برنامه ریزی خطی را می توان به کار برد که از حل دستگاه معادلاتی شامل محدودیت های منابع خوراکی و احتیاجات بهتر می باشد که در این روش ها هدف اصلی تامین کردن احتیاجات دام می باشد و سپس قیمت جیره خوراکی مشخص می شود. برنامه ریزی خطی ساده یکی از روش هایی است که از دیرباز مورد استفاده قرار گرفته است ولی به دلیل نیاز به اطلاعات و داده های دقیق در بسیاری از تصمیم گیری های دنیای واقعی نتایج قابل قبولی ارائه نمی دهد، در جهان واقعی بسیاری از اطلاعات ناشناخته هستند. این اطلاعات نادقیق و مبهم معمولاً توسط اعداد قطعی بیان می شوند که با توجه و در نظر گرفتن عدم قطعیت نادرست است. از آنجایی که عدم قطعیت، فقدان دقت و اطلاعات ناقص در تنظیم بهینه جیره های خوراکی دام با روش های موجود که بر اساس برنامه ریزی های خطی انجام می شود، وجود دارد، استفاده از روش مناسبی جهت برآوردن این امر بدیهی است. در تصمیم گیری هنگامی که با عدم دقت و قطعیت مواجه هستیم، نظریه مجموعه های فازی یکی از بهترین ابزار برای لحاظ کردن عدم قطعیت در پارامترهای تصمیم گیری است. برنامه ریزی فازی به دلیل این که امکان دخالت داده های نادقیق و مبهم را در پارامترهای مدل، به تصمیم گیرندگان می دهد، نسبت به مدل های کلاسیک برنامه ریزی ریاضی برای استفاده در مسایل بهینه سازی دارای کاربرد انعطاف پذیری بیش تری بوده و نتایج قابل اعتمادتر می باشد. ناصری [۲] ضمن تعریف مفاهیم پایه ای برنامه ریزی خطی کلاسیک در محیط فازی همچون جواب های شدنی، جواب های پایه ای، جواب بهینه، جواب تباهیده، شرایط بهینگی و... الگوریتم های سیمپلکس فازی برای حل مسایل برنامه ریزی خطی عدد فازی و مسایل برنامه ریزی خطی با متغیرهای فازی را ارائه کرد.

مسایل برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای نوع خاصی از مدل های با ضرایب نادقیق است که در برنامه ریزی مسایل واقعی کاربرد فراوانی دارد. در حل یک مساله برنامه ریزی خطی بازه ای می توان جواب بهینه را در یک بازه به دست آورد که می تواند به نوبه خود اطلاعات بیش تری را در اختیار تصمیم گیرندگان قرار دهد؛ یعنی هر مقداری در این بازه، جواب بهینه است. همچنین با توجه به مجموعه برش ها در اعداد فازی می توان یک برنامه ریزی خطی با ضرایب فازی را به مساله برنامه ریزی خطی بازه ای تبدیل نمود. با حل مساله بازه ای برای برش های متعدد می توان مقادیر بهینه تابع هدف را به دست آورد.

در روش فازی احتیاج به خبره دارید که دقیقاً میزان مصرف و احتیاجات و یا قیمت خوراک را مشخص کند که گاهی اوقات به دلیل اطلاعات ناقص و یا داده های کم این تخمین به درستی انجام نمی پذیرد. در روش بازه ای هم بیش تر حالت کلی مدنظر می باشد یعنی بازه قیمتی در حالت کلی در نظر گرفته می شود و اگر قیمت در یک روز مدنظر باشد و یا احتیاجات روز خاصی مورد توجه باشد امکان پذیر نیست. این در حالی است که با توجه به مفاهیم بنیادی اعداد خاکستری این امر به آسانی قابل دستیابی است. از این رو از روش برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری در هزینه، منابع و همچنین ضرایب مصرف استفاده شده است. مزیت این روش در آن

است که پارامترهای مساله را می توان به صورت اعداد خاکستری بازه ای بیان کرد و با توجه به میزان اطمینان به داده ها مساله را حل کرد.

در زمینه نظریه سیستم های خاکستری دننگ [۴۳] ضمن تشریح و توصیف سیستم های خاکستری و اعداد خاکستری به تصمیم گیری در موقعیت های خاکستری پرداخت. زنگ و لويس [۵] در مطالعه ای به ارایه مفهوم بهینه سازی سیستم های خاکستری پرداخته و به وسیله تحلیل نظری و مثال های عددی نشان دادند که مفهوم ارایه شده منطقی و معنادار است. چن و همکاران [۶] در مطالعه ای ضمن توصیف استفاده نظریه سیستم های خاکستری در مسایل برنامه ریزی ریاضی به مسایل برنامه ریزی خطی خاکستری پرداختند. همچنین استفاده از اعداد خاکستری بازه ای و پیش بینی خاکستری را در این مدل ها توسعه دادند که نتایج نسبت به مدل های قبلی در این زمینه رضایت بخش بوده است. لئو و همکاران [۷] در مطالعه ای به ارایه جواب های مکانی برای برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری پرداختند و با تبدیل این گونه مسایل به چندین مساله برنامه ریزی خطی معمولی آن را حل کرده اند و مشکل ارزیابی جواب ها را با معرفی درجه اطمینان جواب برطرف کردند. رضوی و همکاران [۸] در مطالعه ای با ارایه یک رویکرد برنامه ریزی چندهدفه به حل مسایل برنامه ریزی خطی خاکستری پرداختند. نتایج آن ها نشان داد که روش ارایه شده می تواند هر مساله برنامه ریزی خطی خاکستری را در حالت کلی حل کند و محدودیت های موجود در روش های قبل را برطرف کند. آن ها با توجه به رابطه ترتیب میان اعداد خاکستری بازه ای این روش را ارایه کردند. رن و همکاران [۹] در مطالعه ای یک مدل برنامه ریزی مبتنی بر برنامه ریزی خاکستری را برای سیستم مجتمع شیمیایی در شرایط عدم قطعیت ارایه دادند. به منظور حل مدل خاکستری مساله، یک روش جدید معرفی کردند که به تصمیم گیرنده در به دست آوردن هدف خواسته شده خود کمک بهتری می کند. در مدل خاکستری آن ها مقدار اعتبار جواب می تواند توسط تصمیم گیرنده پیشنهاد شود و نتایج برنامه ریزی تولید توسط مدل محاسبه می شود. لی و همکاران [۱۰] در مطالعه ای به ارایه یک فرمول کلی به منظور محاسبه معکوس ماتریس خاکستری پرداخته و از نتایج آن در حل برنامه ریزی خطی خاکستری استفاده کرده اند و نشان دادند که محاسبه آن بسیار ساده و مشکل دیگر روش های حل برنامه ریزی خطی و غیرقطعی را ندارد. نتایج آن ها همچنین می تواند در دیگر شاخه های تحقیق در عملیات هم استفاده شود. باغبان و همکاران [۱۱] رویکرد تحلیل پوششی داده های خاکستری را در ارزیابی و رتبه بندی پیمان کاران و ارتقاء پیمان کاران ناکارا ارایه دادند. پس از جمع آوری داده های اولیه در قالب مدل تحلیل پوششی داده های خاکستری نسبت به حل مدل اقدام گردید و با مشخص شدن جواب مدل اولیه تعدادی از پیمان کاران که دارای کارایی نسبی صد در صد بودند انتخاب شده، پس از مشخص شدن پیمان کاران کارا، با استفاده از الگوریتمی جهت رتبه بندی کامل عملکرد پیمان کاران کارا انجام گردید. در مرحله آخر ارایه راهکارهای مناسب برای بالا بردن کارایی پیمان کاران ناکارا ارایه گردید. در مطالعه ای ثابت مطلق و همکاران [۱۲] از مفهوم نظریه خاکستری در ارزیابی و انتخاب تامین کنندگان استراتژیک استفاده کردند. در این مطالعه تلاش شده است تا از یک رویکرد ترکیبی مبتنی بر فرآیند تحلیل سلسله مراتبی و تاپسیس خاکستری برای ارزیابی و انتخاب تامین کنندگان استفاده شود. جباری و

همکاران [۱۳] در مقاله ای با عنوان ارزیابی عملکرد و انتخاب پرتفوی از صندوق های سرمایه گذاری سهام از مفهوم نظریه سیستم های خاکستری در تعیین مدل مناسب تصمیم گیری برای سرمایه گذاری با توجه به اندازه ی کوچک نمونه و نقص اطلاعات استفاده کردند که در نهایت نسبت سرمایه گذاری در هر صندوق با ارایه برنامه ریزی خطی خاکستری و برنامه ریزی عدد صحیح تعیین شد.

تاکنون استفاده چندانی از برنامه ریزی خطی خاکستری در تنظیم جیره دام نشده است اما مطالعات زیادی در زمینه تنظیم جیره خوراکی دام با استفاده از برنامه ریزی خطی و برنامه ریزی خطی فازی صورت گرفته که از جمله این پژوهش ها می توان به مطالعه اقدس طینت و همکاران [۱۴] اشاره کرد که به تنظیم جیره جوجه های گوشتی در فاصله ۳ تا ۶ هفتهگی با استفاده از برنامه ریزی خطی فازی متقارن پرداختند. آن ها با استفاده از ۱۲ ماده خوراکی، ۱۱ مورد برای تامین شدن را مدنظر داشتند که شش جیره مختلف فازی باقیمت های مختلف را به دست آمد که همگی خوب، اما درجه خوبی آن ها متفاوت بوده است. کدنز و همکاران [۱۵] کاربرد بهینه سازی فازی در مساله جیره خوراکی در مزارع آرژانتین را ارایه کرده و نرم افزاری را هم تهیه کردند که قابلیت های فراوانی از جمله پیشنهاد جیره های مختلف با میزان اقناع احتیاجات جیره، قیمت و میزان برآورده شدن قیود داشت. در این زمینه یاقوتی خراسانی و بخشوده [۱۶] در مطالعه ای با عنوان تعیین ترکیب بهینه جیره غذایی گاو شیری با روش برنامه ریزی فازی که در شرکت سهامی زراعی تربت جام صورت گرفته است، ذکر کرده اند که یکی از اقسام عمده هزینه در واحدهای دام پروری هزینه خوراک دام است که با گزینش یک جیره مناسب و با در نظر گرفتن نهاده های در دسترس می توان هزینه ها را کاهش داد. در این مطالعه به منظور تهیه یک جیره انعطاف پذیر به روش فازی ابتدا یک برنامه بهینه با استفاده از روش برنامه ریزی خطی تهیه شد. نتایج مقایسه دو روش قاطع و فازی نشان می دهد که جیره های به دست آمده از دو روش به مقدار زیادی مشابه هستند و به مقدار اندکی تفاوت دارند و هزینه های روش فازی کم تر از روش های قاطع است. درویشی سلوکلائی و همکاران [۱۷] در مطالعه ای که عنوان آن کاربرد بهینه سازی فازی در تنظیم جیره خوراکی گاوهای شیری است به جیره نویسی با روش برنامه ریزی ریاضی فازی پرداخته اند و نتایج حاصل از این جیره نویسی را با روش برنامه ریزی خطی قطعی مقایسه کرده اند در مجموع در این مطالعه نتیجه گرفته شده است که با توجه به مفاهیم مربوط به مجموعه ها و اعداد فازی، استفاده از این روش در تنظیم جیره بسیار مفیدتر و واقع بینانه تر خواهد بود.

در این مطالعه، با توجه به عدم قطعیت موجود در مساله جیره نویسی دام و مزیت های نظریه سیستم های خاکستری، تنظیم مواد مغذی جیره خوراکی جوجه های گوشتی با استفاده از روش برنامه ریزی مکانی انجام و نتایج آن با نتایج مدل برنامه ریزی خطی معمولی، فازی، بازه ای مقایسه شدند. همچنین با استفاده از این روش می توان جواب های بهینه متفاوتی با توجه به انعطاف نظر مدیر به دست آورد. به این منظور پس از بیان مقدمه در بخش دوم مروری بر نظریه سیستم های خاکستری و اعداد و عملگرهای خاکستری ارایه می شود. در بخش سوم مساله برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری و برنامه ریزی مکانی بیان می شود. در بخش چهارم رویکردهای مختلف ریاضی و عدم قطعیت در جیره نویسی دام بیان و نتایج حاصل مقایسه می شوند. در بخش پنجم نیز نتایج و پیشنهادات مطرح شده است.

## ۲ نظریه سیستم‌های خاکستری

پروفسور جولانگ دنک، پژوهشگر چینی در سال ۱۹۸۲، نظریه سیستم‌های خاکستری را معرفی نمود که کاربردهای آن امروزه در پنج حوزه ارزیابی، مدل‌سازی، پیش‌بینی، تصمیم‌گیری و کنترل قابل دسته‌بندی است [۱۸]. اتخاذ تصمیمات درست نیازمند وجود اطلاعات کافی می‌باشد که در عمل کم‌تر سیستمی را می‌توان یافت که تمام اطلاعات آن شناخته شده باشند. چراکه تعیین تمام اجزا و روابط بین آن‌ها در بیشتر سیستم‌ها یا غیرممکن بوده و یا بسیار پرهزینه و غیراقتصادی می‌باشد. اگر اطلاعات واضح و شفاف یک سیستم را با رنگ سفید و اطلاعات کاملاً ناشناخته یک سیستم با رنگ سیاه تجسم شود، در این صورت اطلاعات مربوط به بیش‌تر سیستم‌های موجود در طبیعت اطلاعات سفید (کاملاً شناخته شده) و یا سیاه (کاملاً ناشناخته) نیستند بلکه مخلوطی از آن دو یعنی به رنگ خاکستری هستند. این‌گونه سیستم‌ها را سیستم‌های خاکستری می‌نامند که اصلی‌ترین مشخصه آن‌ها، کامل نبودن اطلاعات مربوط به آن سیستم است. هر سیستم خاکستری به وسیله اعداد خاکستری، معادلات خاکستری و ماتریس‌های خاکستری توصیف می‌شود که در این میان اعداد خاکستری به مثابه اتم‌ها و سلول‌های این سیستم هستند.

عدد خاکستری می‌تواند به عنوان عددی با اطلاعات نامطمئن تعریف شود. یک عدد خاکستری می‌تواند به صورت  $\otimes \in [a, b]$  تعریف شود؛ به عبارت دیگر عدد خاکستری به عددی اطلاق می‌شود که مقدار دقیق آن نامشخص است اما بازه‌ای که مقدار آن را در برمی‌گیرد شناخته شده است. طبق تعریف لی و همکاران [۱۸]، اعداد خاکستری را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

فرض کنیم  $X$  مجموعه مرجع باشد. آنگاه مجموعه خاکستری  $G$  از مجموعه مرجع  $X$  با دو نماد  $\bar{\mu}_G(x)$  و  $\underline{\mu}_G(x)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\mu}_G(x) : x \rightarrow [0, 1]$$

$$\underline{\mu}_G(x) : x \rightarrow [0, 1]$$

که در آن  $\bar{\mu}_G(x) \geq \underline{\mu}_G(x)$  و  $x \in X$  و  $X = R$  می‌باشد.

$\bar{\mu}_G(x)$  و  $\underline{\mu}_G(x)$  به ترتیب حد بالا و حد پایین از تابع عضویت  $G$  می‌باشند. شایان ذکر است که در حالت تساوی مجموعه خاکستری  $G$  تبدیل به مجموعه فازی می‌شود که نشان‌دهنده شمول نظریه خاکستری به حالت‌های فازی و انعطاف آن در مواجهه با مسایل فازی است [۱۸]. اعداد خاکستری می‌توانند فقط با کران پایین به شکل  $\otimes \in [a, \infty)$  یا فقط با کران بالا به شکل  $\otimes \in (-\infty, \bar{a}]$  باشند و یا این که هم دارای کران پایین  $\underline{a}$  و هم دارای کران بالا  $\bar{a}$  باشند که در این صورت عدد خاکستری بازه‌ای نامیده می‌شود و به صورت  $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$  نمایش داده می‌شود. به عنوان نمونه، وزن یک بسته که بین ۲۰ تا ۲۵ کیلوگرم می‌باشد و یا اندازه قد یک مرد که بین ۱/۸ تا ۱/۹ متر می‌باشد، نمونه‌هایی از اعداد خاکستری بازه‌ای هستند که به ترتیب به شکل  $\otimes_1 \in [20, 25]$  و  $\otimes_2 \in [1/8, 1/9]$  نوشته می‌شوند.

هرگاه دو عدد خاکستری  $\otimes_1 \in [a, b]$ ،  $\otimes_2 \in [c, d]$  مفروض باشند در این صورت روابط میان عملگرهای بازه‌ای گسترش یافته برای اعداد خاکستری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(1) \text{ جمع دو عدد خاکستری: } \otimes_1 + \otimes_2 \in [a+c, b+d]$$

$$(2) \text{ تفریق دو عدد خاکستری: } \otimes_1 - \otimes_2 = \otimes_1 + (-\otimes_2) \in [a-d, b-c]$$

$$(3) \text{ قرینه یک عدد خاکستری: } -\otimes_1 = [-b, -a]$$

$$(4) \text{ معکوس یک عدد خاکستری: } \otimes_1^{-1} \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$$

$$(5) \text{ ضرب دو عدد خاکستری: } \otimes_1 \cdot \otimes_2 \in [\text{Min}\{ac, ad, bc, bd\}, \text{Max}\{ac, ad, bc, bd\}]$$

$$(6) \text{ تقسیم دو عدد خاکستری: } \frac{\otimes_1}{\otimes_2} = \otimes_1 \cdot \otimes_2^{-1}$$

$$\frac{\otimes_1}{\otimes_2} \in [\text{Min}\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\}, \text{Max}\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\}]$$

هر گاه  $k$  یک عدد حقیقی مثبت باشد، ضرب عددی آن در مجموعه خاکستری به صورت زیر خواهد بود:

$$K \in \mathbb{R}^+, K \cdot \otimes \in [Ka, Kb]$$

طول عدد خاکستری که با نماد  $L(\otimes_1)$  نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$L(\otimes_1) = [b - a]$$

برای مقایسه دو عدد خاکستری از مفهوم درجه امکان خاکستری استفاده می شود. هر گاه  $a < b$  و  $\otimes_1 \in [a, b]$  و

$\otimes_2 \in [a, b], c < d$  دو عدد خاکستری باشند درجه امکان خاکستری  $\otimes_1 \leq \otimes_2$  به شکل زیر تعریف می شود:

$$P\{\otimes_1 \leq \otimes_2\} = \frac{\text{Max}(\cdot, L^* - \text{Max}(\cdot, b - c))}{L^*}$$

که در آن  $L^* = L(\otimes_1) + L(\otimes_2)$  می باشد. با توجه به نسبت دو عدد خاکستری چهار حالت برای  $\otimes_1$  و  $\otimes_2$

ممکن است رخ دهد:

الف) اگر  $a=c$  و  $b=d$  باشد، آنگاه دو عدد خاکستری مساوی هستند ( $\otimes_1 = \otimes_2$ ). در این صورت می توان

$$\text{نوشت: } P(\otimes_1 \leq \otimes_2) = 0.5$$

ب) اگر  $c > b$  باشد، آنگاه  $\otimes_1 < \otimes_2$  و خواهیم داشت:  $P(\otimes_1 \leq \otimes_2) = 1$

ج) اگر  $d < a$  باشد، آنگاه  $\otimes_1 < \otimes_2$  و خواهیم داشت:  $p(\otimes_1 \leq \otimes_2) = 0$

د) اگر یک قسمت مشترک در دو عدد خاکستری وجود داشته باشد در این صورت اگر  $p(\otimes_1 \leq \otimes_2) < 0.5$

باشد در این صورت گفته می شود که عدد  $\otimes_2$  از عدد  $\otimes_1$  کوچک تر است و اگر  $p(\otimes_1 \leq \otimes_2) > 0.5$  باشد،

عدد  $\otimes_2$  از عدد  $\otimes_1$  بزرگ تر است.

### ۳ مساله برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری

در این بخش به مفاهیم اولیه و برخی تعاریف مسایل برنامه ریزی خطی که دارای پارامترهای خاکستری بوده

پرداخته و ضمن معرفی مقادیر سفید شده آنها، مساله برنامه ریزی مکانی نیز بررسی می شود. شکل کلی مساله

برنامه ریزی خطی به صورت زیر است:

$$\text{Min (Max)} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.t.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq (\leq) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq (\leq) b_2, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq (\leq) b_m, \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned}$$

حال فرض کنید

$$\begin{aligned} X &= [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\ C(\otimes) &= [c_1(\otimes), c_2(\otimes), \dots, c_n(\otimes)]^T \\ b(\otimes) &= [b_1(\otimes), b_2(\otimes), \dots, b_m(\otimes)]^T \\ A(\otimes) &= \begin{bmatrix} a_{11}(\otimes) & a_{12}(\otimes) & \dots & a_{1n}(\otimes) \\ a_{21}(\otimes) & a_{22}(\otimes) & \dots & a_{2n}(\otimes) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\otimes) & a_{m2}(\otimes) & \dots & a_{mn}(\otimes) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} c_j(\otimes) &\in [c_j, \bar{c}_j], \quad \underline{c}_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ b_i(\otimes) &\in [b_i, \bar{b}_i], \quad \underline{b}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ a_{ij}(\otimes) &\in [a_{ij}, \bar{a}_{ij}], \quad \underline{a}_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

آنگاه

$$\text{Max } S = C(\otimes)X$$

s.t.

$$\begin{aligned} A(\otimes)X &\leq b(\otimes), \\ X &\geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

یک مساله برنامه ریزی با پارامترهای خاکستری نامیده می شود و  $C(\otimes)$  بردار هزینه خاکستری،  $A(\otimes)$  ماتریس مصرف خاکستری  $b(\otimes)$  بردار محدودیت منابع خاکستری و  $X$  بردار تصمیم برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری می باشد. در حقیقت  $X$  یک بردار خاکستری است [۱۹].

**تعریف ۱:** فرض کنید  $\rho_j, \beta_i, \delta_{ij} \in [0, 1], i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$  و مقادیر سفید شده پارامترهای خاکستری به ترتیب به صورت زیر باشند:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_j(\otimes) &= \rho_j \bar{c}_j + (1 - \rho_j) \underline{c}_j; j = 1, \dots, n. \\ \tilde{b}_i(\otimes) &= \beta_i \bar{b}_i + (1 - \beta_i) \underline{b}_i; i = 1, \dots, m. \\ \tilde{a}_{ij}(\otimes) &= \delta_{ij} \bar{a}_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \underline{a}_{ij}; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

که در آن  $\tilde{A}(\otimes), \tilde{b}(\otimes), \tilde{C}(\otimes)$  به ترتیب بردار سفید شده هزینه، محدودیت منابع و ماتریس سفید شده مصرف هستند. آنگاه

$$\begin{aligned}Max S &= \tilde{C}(\otimes)X \\ s.t. & \\ \tilde{A}(\otimes)X &\leq \tilde{b}(\otimes), \\ X &\geq 0.\end{aligned} \tag{2}$$

برنامه ریزی مکانی برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری نامیده می شود.

$\rho_j (j = 1, \dots, n)$  ضرایب مکانی بردار هزینه،  $\beta_i (i = 1, \dots, m)$  ضرایب مکانی بردار محدودیت منابع  $\delta_{ij} (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$  ضرایب مکانی مصرف می باشد.

در تعریف فوق،  $\rho_j$  بازتاب نوسان قیمت  $Z$  امین محصول می باشد که می تواند با استفاده از تحلیل بازار تعیین شود. مقادیر کوچک تر  $\rho_j$  نمایشگر کم ترین قیمت مورد انتظار از  $Z$  امین محصول و مقادیر بزرگ تر  $\rho_j$  قیمت مورد انتظار بالاتری از  $Z$  امین محصول است.

ضریب  $\beta_i$  بازتابی از موجودی بازار  $i$  امین منبع است. کم ترین مقدار  $\beta_i$  بیانگر کسری موجودی  $i$  امین منبع بوده و بزرگ ترین مقدار  $\beta_i$  کفایت موجودی  $i$  امین منبع را بیان می کند.

به طور مشابه کم ترین مقدار  $\delta_{ij}$  بیانگر کم ترین مقدار مصرف  $i$  امین منبع برای تولید یک واحد از  $Z$  امین محصول و مقادیر بزرگ تر  $\delta_{ij}$  نشانگر بالاترین مصرف از  $i$  امین منبع برای تولید یک واحد از  $Z$  امین محصول می باشد.

**گزاره ۱:** مقدار بهینه ماکزیمم  $S$  برنامه ریزی مکانی یک برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری تابعی با  $m + n + mn$  متغیر  $\rho_j, \beta_i, \delta_{ij} (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$  می باشد [۱۹].

از گزاره ۱ مقدار بهینه ماکزیمم  $S$  از برنامه ریزی مکانی می تواند به صورت زیر نشان داده شود:

$$Max S = f((\rho_j, \beta_i, \delta_{ij}) | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

به طور مشابه برنامه ریزی مکانی آن را می تواند به صورت  $LP((\rho_j, \beta_i, \delta_{ij}) | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$  نشان داد: برای راحتی، مفروضات زیر را در نظر می گیریم.

فرض ۱.  $rank(\tilde{A}(\otimes)) = m < n$ .

فرض ۲. مجموعه متشکل از جواب های شدنی  $LP((\rho_j, \beta_i, \delta_{ij}) | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$  ناتهی است.

فرض ۳. مجموعه  $\{X | \tilde{A}(\otimes)X \leq \tilde{b}(\otimes), X \geq 0\}$  متشکل از بردارهای حقیقی کران دار است.

در عین حال برنامه ریزی مکانی  $((\rho_j, \beta_i, \delta_{ij}) | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$  می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\text{Max } S = [\tilde{C}_B(\otimes), \tilde{C}_N(\otimes)] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$$

s.t.

$$[\tilde{B}(\otimes), \tilde{N}(\otimes)] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} \leq \tilde{b}(\otimes),$$

$$X_B, X_N \geq 0.$$

(۳)

یعنی،  $m$  ستون اول ماتریس سفید شده مصرف  $\tilde{A}(\otimes)$  ماتریس پایه  $\tilde{B}(\otimes)$  می‌باشند و  $n-m$  ستون دیگر  $\tilde{N}(\otimes)$  غیر پایه‌ای می‌باشند. بردارهای پایه‌ای و غیر پایه‌ای متناظر با  $\tilde{B}(\otimes)$  و  $\tilde{N}(\otimes)$  به ترتیب  $X_B$  و  $X_N$  می‌باشند. همچنین بردارهای سفید شده هزینه متناظر با  $X_B$  و  $X_N$  به ترتیب به صورت  $\tilde{C}_B(\otimes)$  و  $\tilde{C}_N(\otimes)$  نوشته می‌شوند. از فرض ۳ و با توجه به اینکه  $X_N = 0$ ، بدیهی است که

$$X = [X_B, X_N]^T = [\tilde{B}^{-1}(\otimes)\tilde{b}(\otimes), 0]^T$$

$$S = \tilde{C}_B(\otimes)\tilde{B}^{-1}(\otimes)\tilde{b}(\otimes)$$

و بردار آزمون بهینگی به صورت زیر است:

$$r = \tilde{C}_B(\otimes) - \tilde{C}_B(\otimes)\tilde{B}^{-1}(\otimes)\tilde{A}(\otimes)$$

**گزاره ۲:** فرض کنید برنامه‌ریزی مکانی (۳) مفروضات ۲، ۱ و ۳ بالا را برآورده می‌سازد و  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  یک جواب پایه‌ای از برنامه‌ریزی مکانی (۳) باشد. آنگاه  $\{x_j \mid j = 1, \dots, n\}$  کران‌دار است [۱۹].

**گزاره ۳:** حداقل یک جواب شدنی پایه‌ای برای مساله برنامه‌ریزی مکانی  $LP((\rho_j, \beta_i, \delta_{ij}))$  وجود دارد که در مفروضات ۲، ۱ و ۳ صدق می‌کند [۱۹].

برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری همچنین برنامه‌ریزی خطی شناور خاکستری نیز نامیده می‌شود. در حقیقت، یک مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری، مجموعه‌ای مرکب از تعدادی مسایل معمولی از برنامه‌ریزی خطی است. فرض می‌کنیم بردارها و ماتریس‌های سفید شده داده شده در زیر خاصیت نامنفی بودن را حفظ می‌کنند.

$$\text{Max } S = [\tilde{C}_B(\otimes), \tilde{C}_N(\otimes)] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$$

s.t.

$$[\tilde{B}(\otimes), \tilde{N}(\otimes)] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} \leq \tilde{b}(\otimes),$$

$$X_B, X_N \geq 0.$$

**تعریف ۲:** فرض کنید برای هر  $i = 1, \dots, m$  و  $j = 1, \dots, n$  داشته باشیم:  $\rho_j = \rho$ ,  $\beta_i = \beta$ ,  $\delta_{ij} = \delta$ . برنامه ریزی مکانی متناظر  $(\rho, \beta, \delta)$  - برنامه ریزی مکانی نامیده می شود و به صورت  $LP(\rho, \beta, \delta)$  نوشته می شود. مقدار بهینه آن با ماکزیمم  $S(\rho, \beta, \delta)$  نمایش داده و مقدار بهینه  $(\rho, \beta, \delta)$  - مکانی نامیده می شود.

**قضیه ۱ [۱۹]:** برای برنامه ریزی مکانی  $LP(\rho, \beta, \delta)$  داریم:

$$(۱) \text{ هنگامی که } \rho = \rho_1, \beta = \beta_1, \delta_1 \leq \delta_2 \text{ آنگاه } \text{Max} S(\rho_1, \beta_1, \delta_1) \geq \text{Max} S(\rho_1, \beta_1, \delta_2)$$

$$(۲) \text{ هنگامی که } \rho_1 \leq \rho_2, \beta = \beta_1, \delta = \delta_1 \text{ آنگاه } \text{Max} S(\rho_1, \beta_1, \delta_1) \geq \text{Max} S(\rho_2, \beta_1, \delta_1)$$

$$(۳) \text{ هنگامی که } \rho = \rho_1, \beta_1 \leq \beta_2, \delta = \delta_1 \text{ آنگاه } \text{Max} S(\rho_1, \beta_1, \delta_1) \geq \text{Max} S(\rho_1, \beta_2, \delta_1)$$

در اینجا  $\rho$  نشانگر سطح هزینه کلی  $n$  نوع از محصولات،  $\beta$  بیانگر وضعیت کلی عرضه  $m$  نوع منابع و همچنین  $\delta$  بازتاب جامع از سطوح روش صنعتی، اندازه نیروی کار و سطوح مدیریتی کاربردی در تولید می باشد.

**تعریف ۳:** زمانی که  $\rho = \beta = 1, \delta = 0$ ، برنامه ریزی مکانی متناظر آن  $LP(1, 1, 0)$  یک مدل ایده آل برای مساله برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری نامیده می شود که مقدار بهینه آن به صورت  $\text{Max} \bar{S}$  نوشته می شود.

**تعریف ۴:** وقتی  $\rho = \beta = 0, \delta = 1$ ، برنامه ریزی مکانی متناظر آن  $LP(0, 0, 1)$  یک مدل بحرانی برای مساله برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری نامیده می شود که مقدار بهینه آن به صورت  $\text{Max} \underline{S}$  نوشته می شود.

**تعریف ۵:** هنگامی که  $\rho = \beta = \delta = \theta$ ، برنامه ریزی مکانی متناظر یک برنامه ریزی  $\theta$  - مکانی نامیده می شود و با  $LP(\theta)$  نشان می دهند. به طور مشابه، مقدار بهینه آن به صورت  $\text{Max} S(\theta)$  نوشته و مقدار بهینه  $\theta$  - مکانی نامیده می شود. به ویژه زمانی که  $\theta = 0/5$ ، برنامه ریزی  $\theta$  - مکانی متناظر  $LP(0/5)$  برنامه ریزی سفید شده متوسط نامیده می شود.

به طور کلی، برنامه ریزی سفید شده متوسط رایج ترین نوع از برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری است.

**قضیه ۲ [۱۹]:** برای هر  $\rho, \beta, \delta \in [0, 1]$  خواهیم داشت:

$$(۱) \text{Max} \underline{S} \leq \text{Max} S(\rho, \beta, \delta) \leq \text{Max} \bar{S}$$

$$(۲) \text{Max} \underline{S} \leq \text{Max} S(\theta) \leq \text{Max} \bar{S}$$

**اثبات:** تنها به اثبات (۱) می پردازیم. اثبات دومین گزاره مشابه (۱) می باشد که از بیان آن صرف نظر می شود.

از آنجایی که  $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \delta \leq 1$  از قضیه ۱ نتیجه می شود که

$$\text{Max} \underline{S} = \text{Max} S(0, 0, 1) \leq \text{Max} S(\rho, 0, 1) \leq \text{Max} S(\rho, \beta, 1) \leq \text{Max} S(\rho, \beta, \delta).$$

به طور مشابه می توان نشان داد:  $\text{Max} S(\rho, \beta, \delta) \leq \text{Max} \bar{S}$ .

#### ۴ ارایه مدل خاکستری و مقایسه آن با مدل های ریاضی در تنظیم جیره دام

در این بخش چهار مساله مدل سازی آورده می شود تا با مثال ضرورت استفاده از رویکرد سیستم های خاکستری در مدل سازی ریاضی توصیف گردد.

**مسئله ۱:** (بیان مسئله به فرم برنامه‌ریزی خطی کلاسیک) در یک مرغداری ۱۰۰۰ جوجه نگهداری می‌شوند که برای خوراک آن‌ها از دو نوع ماده خوراکی سویا و ارزن استفاده می‌شود. هر جوجه ۱/۱۵ کیلوگرم غذا در روز می‌خورد و روزانه حداقل ۰/۲۲ کیلوگرم پروتئین و ۰/۰۰۵ کیلوگرم کلسیم نیاز دارد. همچنین هر کیلوگرم سویا ۵۰ درصد پروتئین و ۰/۶۵ درصد کلسیم دارد. قیمت هر کیلوگرم آن ۰/۴ دلار است. هر کیلوگرم ارزن شامل ۱۰ درصد پروتئین و ۰/۳ درصد کلسیم است و قیمت هر کیلوگرم آن ۰/۲ دلار می‌باشد. ارزن و سویا به چه نسبتی باید مخلوط شوند تا هزینه خوراک دام حداقل گردد؟

هر گاه  $x_1$  مقدار سویا و  $x_2$  مقدار ارزن موردنیاز بر حسب کیلوگرم باشد، مدل مسئله به صورت زیر خواهد

بود:

$$\text{Min } Z = 0.4x_1 + 0.2x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1150, \\ 0.5x_1 + 0.1x_2 &\geq 220, \\ 0.065x_1 + 0.03x_2 &\geq 5, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

**مسئله ۲:** (بیان مسئله به فرم برنامه‌ریزی خطی فازی) در یک مرغداری ۱۰۰۰ جوجه نگهداری می‌شوند که برای خوراک آن‌ها از دو نوع ماده خوراکی سویا و ارزن استفاده می‌شود. هر جوجه در حدود ۱/۱۵ کیلوگرم غذا در روز می‌خورد و روزانه حداقل ۰/۲۲ کیلوگرم پروتئین و در حدود ۰/۰۰۵ کیلوگرم کلسیم نیاز دارد. همچنین هر کیلوگرم سویا در حدود ۵۰ درصد پروتئین و در حدود ۰/۶۵ درصد کلسیم دارد. قیمت هر کیلوگرم آن در حدود ۰/۴ دلار است. هر کیلوگرم ارزن شامل تقریباً ۱۰ درصد پروتئین و تقریباً ۰/۳ درصد کلسیم است و قیمت هر کیلوگرم آن ۰/۲ دلار می‌باشد. ارزن و سویا به چه نسبتی باید مخلوط شوند تا هزینه خوراک دام حداقل گردد؟ کم‌ترین هزینه چقدر است؟

در صورتی که  $x_1$  مقدار سویا و  $x_2$  مقدار ارزن موردنیاز بر حسب کیلوگرم باشد، خواهیم داشت:

$$\text{Min } Z = \overline{0.4} x_1 + \overline{0.2} x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \overline{1150}, \\ \overline{0.5} x_1 + \overline{0.1} x_2 &\geq \overline{220}, \\ \overline{0.065} x_1 + \overline{0.03} x_2 &\geq \overline{5}, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن  $\overline{0.4}$  به عنوان یک عدد فازی است. این مدل، یک مسئله برنامه‌ریزی خطی با ضرایب فازی محسوب می‌شود.

**مسئله ۳:** (بیان مسئله به فرم برنامه‌ریزی بازه‌ای) در یک مرغداری ۱۰۰۰ جوجه نگهداری می‌شود که برای تهیه خوراک آن‌ها از دو نوع ماده سویا و ارزن استفاده می‌گردد. هر جوجه ۱-۱/۳ کیلوگرم سویا و ارزن در روز

می خورد و روزانه حداقل به  $0/23-0/21$  کیلوگرم پروتئین و  $0/004-0/006$  کیلوگرم کلسیم نیاز دارد. هر کیلوگرم از سویا شامل  $48-52$  درصد پروتئین و  $0/8-0/5$  درصد کلسیم می باشد. قیمت هر کیلوگرم  $0/38-0/42$  دلار است. هر کیلوگرم از ارزن شامل  $11/5-8/5$  درصد پروتئین و  $0/3$  درصد کلسیم می باشد که قیمت هر کیلوگرم آن  $0/2$  دلار می باشد. ارزن و سویا به چه نسبتی باید مخلوط شوند تا هزینه خوراک مرغداری حداقل گردد؟ کم ترین هزینه چقدر است؟

واضح است که پارامترها در مساله بهینه سازی فوق اعداد بازه ای هستند که برای حل آن باید مسایل بی شماری را بهینه سازی نمود؛ لذا از روش های معمولی برنامه ریزی خطی نمی توان آن را حل نمود و نیاز به روش های مناسب تری است. از این رو مساله را به صورت قالب برنامه ریزی بازه ای ذیل بیان می کنیم:

هر گاه  $x_1$  مقدار سویا و  $x_2$  مقدار ارزن مورد نیاز بر حسب کیلوگرم باشد، خواهیم داشت:

$$\text{Min } Z = [0/38, 0/42]x_1 + 0/2x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= [1000, 1300], \\ [0/48, 0/52]x_1 + [0/085, 0/115]x_2 &\geq [210, 230], \\ [0/005, 0/008]x_1 + 0/003x_2 &\geq [4, 6], \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن  $[0/38, 0/42]$  عدد بازه ای نامیده می شود و  $0/20 = [0/20, 0/20]$ .

**مساله ۴:** (توصیف مساله از نگاه برنامه ریزی خاکستری)  $1000$  جوجه در مزرعه پرورش جوجه که دو نوع علوفه سویا و ارزن مصرف می کنند، وجود دارند. چون شرایط برای هر جوجه متفاوت است، نمی توان اطلاعات کافی را به منظور محاسبه مقدار ارزن واقعی که هر جوجه روزانه به آن نیاز دارد را جمع آوری کرد. اگرچه، بررسی روش های مناسب نشان می دهد مقدار واقعی علوفه ای که یک جوجه در روز باید بخورد در دامنه  $1-1/3$  کیلوگرم می باشد و علوفه مورد نیاز همه جوجه ها در روز خیلی مشابه است. برای به دست آوردن وزن مناسب، هر جوجه به مقادیر مختلفی از پروتئین و کلسیم نیاز دارد. همچنین مقدار واقعی که هر جوجه روزانه به پروتئین و کلسیم نیاز دارد را نمی دانیم زیرا شرایط متفاوت است؛ اما با مشاهدات عملی می توان مشخص کرد که مقادیر واقعی پروتئین و کلسیم مصرفی هر جوجه به ترتیب  $0/23-0/21$  کیلوگرم می باشد. به علاوه، به خاطر اینکه شرایط تولید استفاده شده توسط هر تولید کننده متفاوت است مقدار واقعی پروتئین و کلسیم سویا را نمی دانیم؛ بنابراین آن ها به ترتیب میان بازه  $[0/48, 0/52]$  و  $[0/005, 0/008]$  هستند. قیمت واقعی سویا در یک روز خاص معلوم نیست به خاطر پیچیدگی بازار، اما باید بین  $0/38$  تا  $0/42$  دلار باشد. به دلایل مشابه، مقدار واقعی پروتئینی که ارزن دارد بین  $[0/085, 0/115]$  کیلوگرم و مقدار کلسیم واقعی آن  $0/003$  کیلوگرم و قیمت آن  $0/2$  دلار برای هر کیلوگرم می باشد. علوفه چطور باید مخلوط شود که هزینه آن برای یک روز خاص مینیمم شود؟

برای مساله های مشابه، از نگاه بازه مقادیر طولانی مدت بررسی می شود در حالی که از دید خاکستری مقادیر فقط برای یک روز بررسی می شوند. گذشته از یک زمان طولانی، هر مقدار در دامنه داده ها از مسایل بازه ای

می تواند درست باشد بنابراین دامنه همه داده‌ها بازه‌ها هستند. برای یک روز، مقدار واقعی داده می تواند تنها یک مقدار باشد و نمی توان به خاطر اطلاعات ضعیف آن را مشخص کرد. اگر چه می توان دامنه تغییرات آن را با استفاده از روش های بررسی مناسب مشخص کرد. این نکته قابل ذکر است که مقدار واقعی یک متغیر در روز دیگر ممکن متفاوت باشد، حتی اگر دامنه یکسانی به دست آوریم. برای مثال، یک جوجه را در نظر بگیرید که ۰/۲۲۲ کیلوگرم پروتئین در یک روز و ۰/۲۲۳ کیلوگرم در روز بعدی مصرف می کند. هردوی ۰/۲۲۲ و ۰/۲۲۳ متعلق به بازه [۰/۲۱، ۰/۲۳] می باشند اما مقادیر واقعی متفاوت هستند. اگر هزینه واقعی سویا در یک روز مشخص نباشد آنگاه قیمت آن یک عدد خاکستری است. با استفاده از روش های بررسی مناسب می توان تخمینی از دامنه [۰/۳۸، ۰/۴۲] را به دست آورد و اطمینان داد که قیمت واقعی باید در این بازه قرار داشته باشد. در این صورت به این بازه مجموعه عدد پوشاننده می گویند؛ اما یک عدد بازه ای است. به طور مشابه برای متغیرهای دیگر هم این موضوع صادق است. حال اگر  $x_1$  مقدار سویا و  $x_2$  مقدار ارزن مورد نیاز بر حسب کیلوگرم باشد، مدل خاکستری آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min } Z = c_1(\otimes)x_1 + 0/2x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= b_1(\otimes), \\ a_{r1}(\otimes)x_1 + a_{r2}(\otimes)x_2 &\geq b_r(\otimes), \\ a_{r1}(\otimes)x_1 + 0/003x_2 &\geq b_r(\otimes), \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

مدل پوشاننده رابطه فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min } Z = [0/38, 0/42]x_1 + 0/2x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= [1000, 1300], \\ [0/48, 0/52]x_1 + [0/085, 0/115]x_2 &\geq [210, 230], \\ [0/005, 0/008]x_1 + 0/003x_2 &\geq [4, 6], \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

ظاهراً معادله (۶) و (۷) یکسان هستند. هر چند مدل پوشاننده رابطه (۸) متفاوت از مدل رابطه (۶) است. وقتی که اطلاعات بیش تری جمع آوری شود مدل پوشاننده ممکن است تغییر کند و تنها یک فرم نمایش از رابطه (۷) است. مدل واقعی تنها یکی از موارد داخل مدل پوشاننده است و آن تنها مدل بالقوه واقعی نامیده می شود. با اضافه شدن اطلاعات، مدل پوشاننده ممکن است تغییر کند اما مدل بالقوه واقعی تغییر نمی کند و در بین مدل پوشاننده جدید قرار می گیرد. درحالی که مدل بازه ای ثابت است. هر مدل مشخص بین آن صحیح است و همه آن ها مربوط به یک واقعیت خاص برای روزهای متفاوت می باشند.

مساله های بیان شده با رویکردهای متفاوت برنامه ریزی خطی ساده، برنامه ریزی خطی بازه ای، برنامه ریزی خطی فازی و برنامه ریزی خطی خاکستری را با روش های معمول مربوطه حل شده و جواب های به دست آمده در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۱. مقایسه جواب رویکردهای قطعی، فازی، بازه ای و خاکستری مساله جیره خوراکی

نوع مساله	$x_1$	$x_2$	Z
برنامه ریزی خطی کلاسیک	۴۴۲/۸۶	۷۰۷/۱۷	۳۱۸/۵۷
برنامه ریزی خطی فازی (تانگ شوچنگ)	۳۹۷	۵۶۴	[۲۲۸, ۳۴۶]
برنامه ریزی خطی بازه ای (تانگ شوچنگ)	[۲۳۴/۵۷, ۱۰۵۰]	[۲۵۰, ۷۶۵/۴۳]	[۲۴۲/۲۲, ۴۹۱]
برنامه ریزی خطی خاکستری (جواب پوشاننده)	[۲۸۱, ۸۲۶/۸۵]	[۲۶۳/۱۵, ۸۱۹]	[۱۵۹/۴۱, ۵۰۲/۸۱]

بر اساس نتایج جدول ۱ مشاهده می شود که مدل برنامه ریزی خطی با روش سادک حل شده، جواب قطعی و مقدار بهینه آن در سطر اول جدول آمده است. تانگ شوچنگ [۲۰] یک جواب برای مدل برنامه ریزی بازه ای و فازی مساله را به دست آورد و نشان داده است که می توان مساله را با انعطاف بیش تری حل کرد. لی و همکاران [۱۰] یک جواب پوششی برای مساله با رویکرد خاکستری به دست آوردند که در سطر آخر جدول آمده است. حال به منظور حل مساله برنامه ریزی خطی خاکستری با روش برنامه ریزی مکانی ابتدا مقادیر سفید شده پارامترهای خاکستری را نوشته سپس جواب مساله به ازای مقادیر مختلف  $\rho$ ،  $\beta$  و  $\delta$  محاسبه می شود. مدل برنامه ریزی خطی سفید شده مساله برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری مساله جیره فوق به صورت زیر می باشد:

$$\text{Min } Z = (0.42\rho_1 + 0.38(1-\rho_1))x_1 + 0.2x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 = 1300\beta_1 + 1000(1-\beta_1),$$

$$(0.52\delta_{r1} + 0.48(1-\delta_{r1}))x_1 + (0.115\delta_{r2} + 0.085(1-\delta_{r2}))x_2 \geq 230\beta_2 + 210(1-\beta_2),$$

$$(0.008\delta_{r3} + 0.005(1-\delta_{r3}))x_1 + 0.003x_2 \geq 6\beta_3 + 4(1-\beta_3),$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

ضرایب هر یک از پارامترهای سفید شده را می توان به صورت جداگانه اعمال کرد که برای سهولت و بدون از دادن کلیت، ضرایب پارامترهای هزینه  $\rho$  و ضرایب پارامترهای منابع  $\beta$  و ضرایب پارامترهای تکنولوژیکی  $\delta$  در نظر گرفته شده است. مدل های روش برنامه ریزی مکانی با مقادیر مختلف  $\rho$ ،  $\beta$  و  $\delta$  و با استفاده از نرم افزار GAMS حل شده و جواب های به دست آمده در جدول ۲ آمده است.

نتایج جدول ۲ نشان می دهد که بهترین مقدار جواب (ایده آل) برابر ۴۹۱ و بحرانی ترین مقدار جواب ۲۴۲/۲۲ می باشد که شباهت زیادی به جواب مدل بازه ای دارد. مقدار جواب برنامه ریزی سفید شده متوسط ۳۲۲/۸۶ به دست آمده است که خیلی نزدیک به روش برنامه ریزی خطی می باشد. مشاهده می شود مقدار ضرایب در پارامترهای سفید شده به طور مستقیم بر روی مقدار جواب نهایی تاثیر گذار است. همان طور که ملاحظه می شود در جدول ۲ مجموعه ای از جواب ها وجود دارد که همگی در دامنه قابل قبولی بوده، اما میزان مناسب بودن آن ها متفاوت است. در این میان می توان بررسی کرد که بیش تر بودن کدام ضرایب ها می تواند روی مقدار

بهینه تاثیر بیش تری داشته باشد. در کل حالات بسیار زیادی را می توان در نظر گرفت که ما فقط چند نمونه از آن را بررسی نموده ایم.

جدول ۲. جواب برنامه ریزی مکانی مساله جیره با ازای مقادیر مختلف

$Z$	$x_1$	$x_2$	$(\rho, \beta, \delta)$
۲۴۲/۲۲	۷۵۶/۴۳	۲۳۴/۵۷	(۰, ۰, ۱)
۴۹۱	۲۵۰	۱۰۵۰	(۱, ۱, ۰)
۳۲۲/۸۶	۹۸۵/۷۱	۳۱۴/۲۹	(۰/۵, ۰/۵, ۰/۵)
۲۷۹/۵۷	۷۶۹/۳۱	۳۲۰/۶۹	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)
۳۳۰/۲۶	۵۶۰/۴۶	۵۲۹/۵۵	(۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)
۳۴۴/۴۷	۴۹۳/۴۵	۵۹۶/۵۵	(۰/۸, ۰/۵, ۰/۳)
۳۷۲/۲۶	۷۰۱/۴۳	۵۶۸/۵۷	(۰/۷, ۰/۹, ۰/۵)
۲۹۷/۶۴	۷۹۷/۷۳	۳۵۲/۲۷	(۰/۳, ۰/۵, ۰/۸)

## ۵ نتیجه گیری

به طور معمول در تنظیم جیره خوراکی دام روش برنامه ریزی خطی کلاسیک به کار برده می شود؛ اما با توجه به این که اغلب داده ها تجربی، نادقیق و تقریبی هستند از مدل های فازی و بازه ای استفاده شده تا جیره تنظیمی از انعطاف پذیری لازم برخوردار باشد. بازه ها معمولاً برای مقادیر تقریبی و یا زمان طولانی مدت بررسی می شوند در حالی که از دید خاکستری مقادیر فقط برای یک زمان خاص بررسی می شوند. گذشته از این، هر مقدار در دامنه داده ها از مسایل بازه ای می تواند درست باشد و این در حالی است که برای یک عدد خاکستری، مقدار واقعی داده می تواند تنها یک مقدار باشد و نمی توان به خاطر اطلاعات ضعیف آن را مشخص کرد. برای تصمیم گیری در محیط فازی نیاز به تابع عضویت و خبره دارید که همواره امکان پذیر نمی باشد. مزیت نظریه دستگاه های خاکستری این است که شرایط فازی بودن را در بر می گیرد. هدف اصلی این پژوهش معرفی روشی جدید برای جیره نویسی دام در شرایط عدم قطعیت بوده است که بسیار کاربردی و مناسب تر باشد. در حقیقت نتایج حاصل از حل و مقایسه مدل رویکردهای مختلف، مویید این مطلب است که به غیر از رویکرد کلاسیک جواب های همه به صورت یک بازه بیان می شوند که تنها طول بازه های آن ها متفاوت است؛ اما با رویکرد خاکستری و با روش برنامه ریزی مکانی می توان بدون نیاز به حل مسایل بازه ای یا تابع عضویت، آن را حل نمود و مقدار قطعی تابع هدف را برای مقادیر مختلف به دست آورد و این رویکرد از لحاظ محاسباتی بسیار حایز اهمیت است. در واقع مجموعه ای از جواب ها وجود دارد که همگی در دامنه قابل قبولی بوده، اما میزان مناسب بودن آن ها متفاوت است. به طوری که مقدار جواب برنامه ریزی سفید شده متوسط به دست آمده خیلی نزدیک به روش برنامه ریزی خطی می باشد. با استفاده از این روش می توان جواب های بهینه متفاوتی با توجه به نوسان قیمت نهاده ها و همچنین میزان موجودی و مقدار مصرف منابع با نظر مدیر به دست آورد. با استفاده از توانایی این روش نویسندگان

درصدند چنین روشی را برای کاربردهای واقعی دیگر و نیز برای مسایل با عدم قطعیت ادراکی مطالعه نمایند. به‌ویژه می‌توان در مطالعات آتی از روش‌های پایه‌ای برنامه‌ریزی خطی همچون الگوریتم سیمپلکس اولیه خاکستری که اخیراً توسط ناصر و همکاران [۲۱] پیشنهاد نمودند برای حل این مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری استفاده کرد. علاوه بر آن، با توسعه نتایج اخیر می‌توان امکان تحلیل حساسیت پارامترهای مدل در شرایط عدم قطعیت را نیز فراهم کرد.

## منابع

- [۲] ناصری، س. ه.، (۱۳۸۶). روش‌های سیمپلکس فازی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۴(۱۳)، ۶۷-۷۶.
- [۱۱] باغبان، ع.، امیری، م.، افت، ل.، شرفی آوزمان، ز.، (۱۳۹۳). ارزیابی و رتبه‌بندی پیمانکاران و ارتقاء پیمانکاران ناکارا با رویکرد تحلیل پوششی داده‌های خاکستری-مورد مطالعه پیمانکاران گروه مپنا. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۲۱-۳۸، (۲)۹.
- [۱۲] ثابت مطلق، م.، صالحی صدقیانی، ج.، ایازی، س. ع.، عابدی نایینی، م.، (۱۳۹۳). ارزیابی و انتخاب تامین‌کنندگان استراتژیک با استفاده از روش ترکیبی فرآیند تحلیل سلسله مراتبی و تاپسیس خاکستری. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۱(۴)، ۱۰۱-۱۱۷.
- [۱۳] جاری، ر.، صدقیانی، ج. ص.، امیری، م.، (۱۳۹۱). ارزیابی عملکرد و انتخاب پرتفوی از صندوق‌های سرمایه‌گذاری سهام. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۹(۱)، ۱-۱۹.
- [۱۴] اقدس طینت، ج.، مرتضوی، س. ا.، (۱۳۸۳). تنظیم جیره جوجه‌های گوشتی در فاصله ۳ تا ۶ هفته‌گی با استفاده از برنامه‌ریزی خطی فازی متقارن. مجموعه مقالات، پنجمین کنفرانس سیستم‌های فازی، ایران، تهران، ۴۸۱-۴۷۳.
- [۱۶] یاقوتی خراسانی، م.، بخشوده، م.، (۱۳۸۶). تعیین ترکیب بهینه جیره غذایی گاوهای شیری با روش برنامه‌ریزی فازی. فصلنامه اقتصاد و کشاورزی، ۲(۱)، ۱۱۷-۱۰۳.
- [1] Waugh, F., (1951). The minimum cost dairy feed. *Farm Economics*, 33, 299-310.
- [3] Deng, J., (1982). The control problems of grey systems, *System Control Letter*, 5, 288-294.
- [4] Deng, J., (1989). Introduction to grey system theory. *The Journal of Grey Systems*, 1(1), 1-24.
- [5] Zheng, Y., Lewis, R. W., (1993). On the optimization concept of grey systems. *Applied Mathematical Modelling*, 17, 388-392.
- [6] Chen, Z., Chen, Q., Chen, W., Wang, Y., (2004). Grey linear programming. *Kybernetes*, 33(2), 238-246.
- [7] Liu, S., Dang, Y., Forrest, J., (2009). On positioned solution of linear programming with grey parameters. *International Conference on Systems, Man and Cybernetics, USA*, 751-756.
- [8] Razavi Hajiagha, S. H., Akrami, H., Hashemi, Sh. S., (2012). A multi-objective programming approach to solve grey linear programming. *Grey Systems: Theory and Application*, 2(2), 259-271.
- [9] Ren, J., Tan, Sh., Dong, L., Zhou, Z., Gao, S., Pan, C., (2013). A planning model for the chemical integrated system under uncertainty by grey programming approach. *Journal of Chemical Technology*, 15(2), 16-22.
- [10] Li, Q. X., Liu, S., Wang, N. A., (2014). Covered solution for a grey linear program based on a general formula for the inverse of a grey matrix. *Grey Systems: Theory and Application*, 4(1), 72-94.
- [15] Cadenas, J. M., Pelta, D. A., Pelta, H. R., Verdegay, J. L., (2004). Application of fuzzy optimization to diet problems in Argentinian farms. *European Journal of Operational Research*, 158, 218-228.
- [17] Darvishi Salookolayi, D., Teimouri Yansari, A., Nasser, S. h., (2011). Application of fuzzy optimization in diet formulation. *The Journal of Mathematics and Computer Science*, 2, 459-468.
- [18] Li, G. D., Yamaguchi, D., Nagai, M., (2007). A grey based decision-making approach to the supplier selection problem. *Mathematical and Computer Modeling*, 46(3-4), 573-581.

- [19] Liu, S., Lin, Y., (2006). Grey Information: Theory and Practical Applications. London, Springer-Verlag, London Limited.
- [20] Shaocheng, T., (1994). Interval number and fuzzy number linear programming. Fuzzy Sets and Systems, 66, 301-306.
- [21] Nasser, S. H., Yazdani, A. and Darvishi salikolaee, D., (2016). A primal simplex algorithm for solving linear programming problem with grey cost coefficients. Journal of New Researches in Mathematics, 1(4), 121-141.