

## مدل سازی بازی های تکاملی کوانتومی دو کیوبیتی مبتنی بر دینامیک های تکراری

محمد پرشان<sup>۱</sup>، مجید یاراحمدی<sup>۲\*</sup>، مجتبی قاسمی کمالوند<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

۲- دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

۳- استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

رسید مقاله: ۱۲ فروردین ۱۴۰۲

پذیرش مقاله: ۴ شهریور ۱۴۰۲

### چکیده

در نظریه بازی های تکاملی مبتنی بر تئوری تکامل، یک روش جهت تجزیه و تحلیل بازی ها و استخراج استراتژی ها ارائه می گردد. در بازی هایی که بازیکنان دارای استراتژی های درهم تنیده هستند، روش های کلاسیک کارایی مناسب را ندارند. زیرا در این گونه از بازی ها، پیامد بازیکنان و تعادل نش بازی متاثر از عامل درهم تنیدگی می باشد. بنابراین برای مدل سازی و تجزیه و تحلیل این بازی ها باید از روش های کوانتومی استفاده نمود. در این مقاله یک روش تکاملی کوانتومی دو کیوبیتی برای مدل سازی و استخراج استراتژی ها در بازی های با عامل درهم تنیدگی ارائه شده است و در نهایت، بازی معمای زندانی به منظور نشان دادن برتری روش تکاملی کوانتومی به روش تکاملی کلاسیک شبیه سازی شده است.

**کلمات کلیدی:** نظریه بازی ها، استراتژی، بازی های کوانتومی، درهم تنیدگی.

### ۱ مقدمه

نظریه بازی ها، در سال ۱۹۴۴ توسط جان فون نیومن و اسکار مورگنسترن برای تحلیل رفتارهای اقتصادی معرفی شد. این نظریه تلاش می کند تا رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت استراتژیک را مدل سازی نموده و به کمک مجموعه ای از ابزار تحلیلی روشی برای تجزیه و تحلیل تصمیم گیری در شرایط تقابل منافع بازیگران ارائه دهد [۱]. این مدل سازی شامل مجموعه بازیکنان، استراتژی های ممکن برای هر بازیکن و ماتریس پیامد بازیکنان است که براساس آن بازیکنان، استراتژی مناسب را انتخاب نموده و در نهایت در تعادل نش پیامدهای حاصل از برآیند انتخاب های استراتژیک بازیکنان بین آنها تقسیم می شود [۲]. امروزه نظریه بازی ها با سرعتی شگفت آوری در زمینه های مختلف در حال توسعه و پیشرفت است. نظریه بازی های تکاملی را می توان نمونه ای از این پیشرفت دانست که گسترش بهره گیری از آن بیان کننده تحولی در ابزارهای مورد استفاده متخصصان نظریه بازی ها، در

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: yarahmadi.m@lu.ac.ir

سال‌های اخیر نسبت به نظریه بازی‌های غیر تکاملی است [۳] این تحول از چند حقیقت نشأت گرفته، ابتدا اینکه تکامل در این نظریه صرفاً تکامل بیولوژیک نیست بلکه می‌تواند شامل مفهومی معادل تکامل در نگرش نیز باشد که در نهایت منجر به تغییر در سیاست‌ها و استراتژی‌ها می‌شود، از طرف دیگر نظریه بازی‌های تکاملی امکان مدل‌سازی پدیده یادگیری را با استفاده از بازی‌های چند مرحله‌ای فراهم نموده است، به گونه‌ای که بعد از هر مرحله جمعیت‌های متناظر با استراتژی‌های بازیکنان توانایی بازنگری استراتژی خود را به منظور حداکثرسازی پیامدهای بازی خواهند داشت، در حالی که نظریه بازی‌های غیر تکاملی از این ویژگی مهم بی‌بهره است. همچنین حل بسیاری از بازی‌ها ما را به تعدادی تعادل نش مخلوط و خالص می‌رساند. لذا، این که بازیکنان میان این استراتژی‌های تعادلی همواره کدام را انتخاب می‌کنند، خود مسأله‌ای است که در نظریه بازی‌های غیر تکاملی برای آن راه حلی ارائه نمی‌شود. اما نظریه بازی‌های تکاملی می‌تواند با مدل کردن روند رسیدن به تعادل، با استفاده از دینامیک‌های تکراری، راه حلی برای این نوع بازی‌ها ارائه دهد. در نهایت این که نظریه بازی‌های تکاملی، یک نظریه پویاست که در آن بازیکنان و استراتژی‌های آنها متناسب با جمعیت بازیکنان شبیه‌سازی شده و برآندگی استراتژی‌های مختلف نسبت به جمعیت محاسبه شده و فرایندی برای کنترل روند تکامل جمعیت ارائه داده می‌شود [۴، ۵]. توسعه اصلی در نظریه بازی‌های تکاملی توسط مانیارد اسمیت در سال ۱۹۸۲ انجام گرفت [۶]. در سال ۱۹۸۷ کار او توسط بردن وینسنت در بازی‌های پیوسته، با بیان تعریفی از استراتژی‌های پایدار تکاملی برحسب ائتلاف چند استراتژی گسترش یافت. در سال ۲۰۱۸ فرناندو سانتوس و همکارانش نظریه بازی‌ها تکاملی را برای مسیریابی خودروهای الکتریکی به کار گرفتند. همچنین مرضیه خاکستری و همکارانش در سال ۱۳۹۷ تحلیل رفتار اوپک را با رویکرد نظریه بازی‌ها تکاملی مورد مطالعه قرار دادند. اقتصاددانان و ریاضی‌دانان دیگری نیز نظریه بازی‌های تکاملی را به صورت نظری بررسی نموده‌اند که از جمله می‌توان به ویبول (۱۹۹۵)، گاردوندر (۱۹۹۶)، لامرلسان (۱۹۹۷)، هوفبار و سیگموند (۱۹۹۸) و گینتیز (۲۰۰۹) اشاره نمود. بررسی نظریه بازی‌های تکاملی از دیدگاه مکانیک و محاسبات کوانتومی یکی از کاربردهای جذاب نظریه بازی‌های کوانتومی است که در آن با استفاده از فرمول‌بندی مکانیک کوانتومی به بررسی وضعیت‌های متعارضی که شامل پدیده‌های کوانتومی مانند درهم‌تنیدگی هستند، پرداخته می‌شود. متأسفانه علی‌رغم این که ماکس پلانک در سال ۱۹۰۰ میلادی نظریه مکانیک کوانتومی را ارائه نمود، ولی تاکنون مطالب چندانی از کاربرد آن در نظریه بازی‌های تکاملی بیان نشده است. نظریه مکانیک کوانتومی، شاخه‌ای از فیزیک نظری است که در مقیاس اتمی و زیراتمی به جای مکانیک کلاسیک و الکترومغناطیس کلاسیک به کار می‌رود. ویژگی‌های مهمی مانند منطبق شدن برحالات اولیه، درهم‌تنیدگی کوانتومی حالات اولیه و برهم‌نهی استراتژی‌ها، نظریه بازی‌های تکاملی کوانتومی را از نظریه بازی‌های تکاملی کلاسیک متمایز می‌کند. در این مقاله یک مدل تکاملی کوانتومی برای بازی‌ها با استراتژی‌های درهم‌تنیده ارائه می‌شود. زیرا، در این گونه از بازی‌ها روش‌های تکاملی کلاسیک به دلیل متاثر بودن پیامد بازیکنان و تعادل نش بازی از عامل درهم‌تنیدگی کارآیی مناسب را ندارند. به همین منظور ابتدا استراتژی‌های کلاسیک بازیکنان به استراتژی‌های کوانتومی، که بردارهایی در فضای هیلبرت هستند، تبدیل شده سپس ماتریس پیامد بازیکنان به کمک استراتژی‌های کوانتومی محاسبه و با استفاده از این ماتریس، دینامیک‌های

تکراری کوانتومی بازیکنان استخراج شده است. در این روش، به کمک دینامیک‌های تکراری فرایند تکامل جمعیت‌هایی که استراتژی‌های خاصی را به کار می‌گیرند بررسی می‌شوند. در پایان، به منظور نشان دادن برتری روش تکاملی کوانتومی به روش تکاملی کلاسیک، بازی معمای زندانی با این روش شبیه‌سازی، مقایسه و تحلیل شده است.

این مقاله در ۷ بخش ارائه شده است. بخش ۲ شامل نظریه بازی‌های تکاملی و مهم‌ترین مفاهیم و معادلات آن است. در بخش ۳ مقدماتی در مورد مکانیک کوانتومی ارائه شده است و در ادامه آن نظریه بازی‌های کوانتومی توضیح داده شده است. در بخش ۴ به طراحی بازی‌های تکاملی کوانتومی و بیان معادلات آن پرداخته می‌شود. در بخش‌های ۵ و ۶ با مدل‌سازی بازی معمای زندانی در دو حالت کوانتومی و کلاسیک، نتایج شبیه‌سازی ارائه و مقایسه گردیده است. در پایان نتیجه‌گیری این مقاله در بخش ۷ بیان گردیده است.

## ۲ نظریه بازی‌های تکاملی

نظریه بازی‌های تکاملی شاخه‌ای از نظریه بازی‌ها است، که در آن جمعیت بازیکنان با استفاده از استراتژی‌های مختلف شبیه‌سازی می‌شوند [۷]. سپس برای تعیین چگونگی تکامل جمعیت، از فرایندی شبیه به انتخاب طبیعی استفاده می‌شود. به طور دقیق یک بازی با  $n$  بازیکن را در نظر بگیرید، که در آن بازیکن  $i$ ام دارای فضای استراتژی  $S_i$  است. در گام اول متناظر با هر بازیکن جمعیتی از بازیکنان مدل‌سازی می‌شود. سپس جمعیت مربوط به بازیکن  $i$ ام به زیرجمعیت‌های  $E_{i1}, E_{i2}, \dots, E_{ik}$  تقسیم می‌شود ( $k$  ممکن است برای هر جمعیت متفاوت باشد). اعضای زیرجمعیت  $E_{ik}$  استراتژی یکسانی را از  $S_i$  انتخاب می‌کنند. در گام بعدی زیرجمعیت‌ها به طور تصادفی با یکدیگر بازی می‌کنند. در این فرآیند، زیرجمعیت‌هایی که عملکرد بهتری را در مقایسه با سایر زیرجمعیت‌های دیگر دارند بزرگ‌تر و زیرجمعیت‌هایی که عملکرد خوبی ندارند، کوچک‌تر می‌شوند [۷]. این روند تا رسیدن به یک استراتژی پایدار که احتمالاً بهترین پاسخ استراتژی را برای هر بازیکن نشان می‌دهد، تکرار می‌شود.

## ۲-۱ استراتژی‌های پایدار تکاملی

استراتژی هر بازیکن، نشان‌دهنده برنامه عمل آن بازیکن در بازی با سایر بازیکنان می‌باشد. در بازی‌های تکاملی، متناظر با مجموعه استراتژی‌های بازیکن  $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\}$  بردار احتمال  $\vec{x}_i$  در نظر گرفته می‌شود که مولفه  $i$ ام آن،  $x_{ij}$  احتمال انتخاب استراتژی  $s_{ij}$  توسط بازیکن  $i$ ام می‌باشد.

$$\vec{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{im} \end{pmatrix} \quad \text{s.t.} \quad x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{im} = 1 \quad (1)$$

بردار استراتژی  $\vec{S}^*$ ، در بازی تکاملی متقارن با ماتریس پیامد  $A$ ، یک استراتژی پایدار تکاملی است، اگر برای

همه استراتژی هایی که  $\vec{S} \neq \vec{S}^*$  در شرط زیر صدق کند:

$$\vec{S}^T A \vec{S} \leq \vec{S}^{*T} A \vec{S}^* \quad (2)$$

واضح است که هر استراتژی مطابق با این ویژگی نیز تعادل نش است [۹، ۱۰].

## ۲-۲ دینامیک های تکراری

فرایند انتخابی که تعیین می کند جمعیت هایی که استراتژی های خاصی را به کار می گیرند چگونه تکامل پیدا می کنند، به عنوان دینامیک های تکراری شناخته می شوند. مدل های کمی متفاوتی برای این دینامیک ها وجود دارد [۱۱، ۱۲]. به طور کلی دو رویکرد در نظریه بازی تکاملی وجود دارد. رویکرد اول که در بیشتر طول حیات این نظریه رایج بوده، رویکرد مینارد اسمیت و جان پرایس است، عبارت است از تعریف یک استراتژی پایدار تکاملی که بازی را در یک حالت پایدار و ایستا در نظر می گیرد و سعی می کند خصوصیات این حالت محاسبه و بررسی شود. در رویکرد دوم، که در این مقاله از آن استفاده شده است، مدلی ساخته می شود که در آن دینامیک های تکراری نحوه تغییر جمعیت ها را در طول زمان توصیف می کند. در این مدل، تغییر در جمعیت نماینده هر استراتژی در طول زمان بررسی می شود و در نهایت نیز در صورت وجود، به حالتی ایستا می رسیم که در رویکرد اول به دنبال آن می گشتیم. اما قبل از تعریف دینامیک تکراری، توضیح مفهوم برازندگی لازم است. تابع برازندگی مشخص می کند هر مجموعه از بازیکنان چقدر موفق است و براساس رابطه  $f_j(\vec{x}_i) = (A_i \vec{x}_i)_j$  برای هر مولفه بردار  $\vec{x}_i$  تعریف می شود. همچنین میانگین برازندگی برای مجموعه بازیکنان با رابطه  $f(\vec{x}) = \vec{x}_i^T A_i \vec{x}_i$  معرفی می شود. در نهایت با توجه به تعریف میانگین برازندگی تحت ماتریس پیامد  $A_i$  دینامیک های تکراری برای بازی های متقارن به صورت زیر تعریف می شود [۱۰].

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij}(t) \left( (A_i \vec{x}_i)_j - \vec{x}_i^T A_i \vec{x}_i \right) \quad i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, m \quad (3)$$

هر گاه بازی به صورت نامتقارن باشد دینامیک های تکراری به صورت زیر تعریف می شوند [۱۰]:

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij}(t) \left( (A_i \vec{x}_k)_j - \vec{x}_i^T A_i \vec{x}_k \right) \quad i, k = 1, \dots, n ; i \neq k \quad (4)$$

که در آن،  $x_i$  و  $A_i$  به ترتیب بردارها و ماتریس های متناظر با استراتژی ها و ماتریس پیامد بازیکنان هستند و نماد  $\nabla$  مجموع مولفه های بردارهای  $A_i \vec{x}_k$  می باشد.

### ۳ مکانیک کوانتومی

مکانیک کوانتومی، شاخه‌ای بنیادی از فیزیک است که در مقیاس اتمی و زیر اتمی به جای مکانیک کلاسیک و الکترومغناطیس کلاسیک به کار می‌رود. در مکانیک کوانتومی حالت سیستم با یک بردار در فضای هیلبرت مشخص می‌شود، این بردار توسط یک عملگر یکانی در طول زمان تحول می‌یابد و با اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر، این بردار به بردارهای ویژه عملگر متناظر با آن مشاهده‌پذیر تصویر می‌شود. به طور کلی مکانیک کوانتومی دارای ماهیت احتمالی است. تلاش‌های زیادی برای حذف مفهوم احتمال از آن شده است، اما نتایج تحقیقات نشان داد که مکانیک کوانتومی در طبیعت خود احتمالی است و نمی‌توان این مفهوم را از آن حذف کرد. یکی از مطالعاتی که در این زمینه انجام شد تحقیقات دوچ است [۱۳].

**برهم‌نهی:** حالت‌های یک سیستم کوانتومی را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد. قاعده‌های ترکیب حالت‌های کوانتومی را می‌توان به صورت جمع و تفریق بردارها بیان کرد. به این ترکیب حالت‌های کوانتومی برهم‌نهی گفته می‌شود [۱۴].

**درهم‌تنیدگی:** درهم‌تنیدگی کوانتومی یکی از پدیده‌های سیستم‌های کوانتومی است که می‌تواند میان دو ذره که نسبت به هم فاصله دارند ارتباط ایجاد کند. هنگامی که دو سیستم کوانتومی با یکدیگر برهم‌کنش انجام می‌دهند، برخی درهم‌تنیدگی بین هر دوی آنها برقرار می‌شود. این ارتباط حتی زمانی که تعامل بین دو سیستم از بین می‌رود و دو سیستم از یکدیگر جدا هستند نیز، ادامه پیدا می‌کند. به بیان دیگر هر نوع تغییر در یکی از سیستم‌ها بلافاصله در سیستم دیگر تغییر به وجود می‌آورد. به این ویژگی سیستم‌های کوانتومی درهم‌تنیدگی گفته می‌شود [۱۴].

**کیوبیت کوانتومی:** به هر بیت کوانتومی، یک کیوبیت گفته می‌شود که واحد اصلی اطلاعات کوانتومی و معادل یک حالت کوانتومی  $|\Psi\rangle$  است که می‌توان آن را به صورت برهم‌نهی  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  نشان داد:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (5)$$

که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  در حالت کلی، اعداد مختلط هستند.

هنگامی که مقدار این کیوبیت را در مبنای استاندارد اندازه می‌گیریم، احتمال رویداد  $|0\rangle$  برابر  $\alpha^2$  و احتمال رویداد  $|1\rangle$  برابر  $\beta^2$  است و رابطه زیر بین  $\alpha$  و  $\beta$  برقرار خواهد بود:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (6)$$

حالت‌های کوانتومی را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j |j\rangle \quad ; \quad \alpha_j \in \mathbb{C} \quad ; \quad \|\Psi\|^2 = \sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_j|^2 = 1 \quad (7)$$

**مشاهده‌پذیرها:** به هر کمیت مشاهده‌پذیر از یک سیستم فیزیکی مانند  $A$ ، یک عملگر هرمیتی مانند  $\hat{A}$  نسبت داده می‌شود، در واقع هر مشاهده‌پذیر یک خاصیت سیستم است که قابلیت اندازه‌گیری دارد.

**اندازه‌گیری:** هر اندازه‌گیری با استفاده از یک مجموعه از عملگرهای اندازه‌گیری  $M_i$  روی مشاهده‌پذیر  $A$  به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\{M_i | M_i : H \rightarrow H; i = 1, \dots, m\} \quad (8)$$

که  $m$  تعداد نتایج ممکن اندازه‌گیری است و اگر سیستم در حالت  $|\Psi\rangle$  باشد و یک اندازه‌گیری روی مشاهده‌پذیر  $A$  انجام شود، آنگاه بعد از اندازه‌گیری، یکی از مقادیر ویژه عملگر  $\hat{A}$  مانند  $a_i$  با احتمال:

$$P(\mu = a_i) = \langle \Psi | M_i^\dagger M_i | \Psi \rangle \quad (9)$$

به دست می‌آید و حالت  $|\Psi\rangle$  بعد از اندازه‌گیری به حالت  $|\Psi'\rangle$  تحول می‌یابد:

$$|\Psi'\rangle = \frac{\langle M_i | \Psi \rangle}{\sqrt{\langle \Psi | M_i^\dagger M_i | \Psi \rangle}} \quad (10)$$

**ضرب تانسوری:** فرض کنید  $T \in L(V)$  تبدیل خطی دلخواهی از فضای  $V$  به خودش و  $S \in L(W)$  تبدیل خطی دلخواهی از فضای  $W$  به خودش باشد. در این صورت عملگر  $T \otimes S$  از فضای  $V \otimes W$  به خودش برای تمامی اعضای فضای ضرب تانسوری  $|v\rangle \otimes |w\rangle$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T \otimes S : V \otimes W \rightarrow V \otimes W \quad (11)$$

$$(T \otimes S)|v\rangle \otimes |w\rangle = (T|v\rangle) \otimes (S|w\rangle)$$

با گسترش خطی  $T \otimes S$  روی همه  $V \otimes W$  خواهیم داشت که:

$$(T \otimes S) \left( \sum_i c_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle \right) = \sum_i c_i (T|v_i\rangle) \otimes (S|w_i\rangle) \quad (12)$$

در حالت ماتریسی، ضرب تانسوری ماتریس‌های  $A \in C^{m_A \times n_A}$  و  $B \in C^{m_B \times n_B}$  به صورت  $A \otimes B$  نمایش داده می‌شود و برابر است با:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (13)$$

هر  $a_{ij}B$  یک بلوک با مرتبه  $m_B \times n_B$  است. بنابراین مرتبه  $A \otimes B$  برابر  $m_A m_B \times n_A n_B$  است.

### ۳- نظریه بازی‌های کوانتومی

نظریه بازی‌های کوانتومی یکی از گسترش‌های نظریه بازی‌ها مبتنی بر سیستم‌های کوانتومی می‌باشد که به بررسی وضعیت‌های متعارضی که در برگیرنده پدیده‌های کوانتومی هستند می‌پردازد. درهم‌تنیدگی کوانتومی حالات اولیه و برهم‌نهی استراتژی‌ها در حالات اولیه دو مفهوم اساسی نظریه بازی کوانتومی هستند، که با لحاظ نمودن این دو مفهوم در مدل بازی می‌توان از پارادایم بازی‌های کلاسیک به پارادایم بازی‌های کوانتومی رسید [۱۴، ۱۵]. اولین گام در این مسیر، معرفی استراتژی‌های کوانتومی محض به مثابه استراتژی‌های خالص کلاسیک است. به عبارت دیگر، در بازی‌های کوانتومی فضای کلاسیک استراتژی‌ها جای خود را به فضای استراتژیکی می‌دهد که متشکل از ترکیب خطی استراتژی‌های کلاسیک در فضای هیلبرت است. بنابراین مجموعه استراتژی‌های ممکن برای هر یک از بازیکنان از یک مجموعه شمارش‌پذیر به یک مجموعه شمارش‌ناپذیر گسترش می‌یابد. به‌طور کلی در مکانیک کوانتومی فرض می‌شود که هر پدیده فیزیکی قابل مشاهده (مثل انرژی، موقعیت و...) توسط

یک عملگر خطی هرمیتی توصیف می‌شود. هر اندازه‌گیری مرتبط با پدیده‌های قابل مشاهده یک مقدار ویژه از عملگر متناظر با آن پدیده همراه با احتمال مشاهده آن را تولید می‌کند [۱۶]. این احتمال، احتمال پیامد بازی می‌باشد که به وسیله توان دوم قدر مطلق متناظر با مختصات این مقدار ویژه، در تجزیه طیفی بردار حالتی که سیستم را توصیف می‌کند، مشخص می‌شود. به عنوان مثال، اگر در بازی معمای زندانی،  $D$  معرف استراتژی عدم همکاری و  $C$  معرف استراتژی همکاری باشد، استراتژی‌های کوانتومی بازی به صورت  $Q = \alpha C + \beta D$  تعریف می‌شوند، به طوری که  $|\alpha|^2$  و  $|\beta|^2$  به ترتیب احتمال انتخاب استراتژی‌های  $C$  و  $D$  می‌باشند.

#### ۴ طراحی بازی‌های تکاملی کوانتومی دو کیوبیتی

در روش دو کیوبیتی کوانتومی، ابتدا استراتژی‌های کلاسیک بازیکنان را به استراتژی‌های کوانتومی که بردارهایی در فضای هیلبرت هستند تبدیل می‌کنیم. برای این کار بازی‌های کلاسیک را با دو استراتژی  $C$  و  $D$  در نظر می‌گیریم، این روش به بازی‌ها با استراتژی‌های بیشتر قابل تعمیم است. استراتژی‌های کوانتومی متناظر با استراتژی‌های کلاسیک  $C$  و  $D$  حالت‌هایی کوانتومی در یک فضای هیلبرت با بردارهای پایه  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  هستند. هر حالت کوانتومی  $|\Psi\rangle$  را می‌توان به صورت  $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  یا به طور معادل زیر در نظر گرفت:

$$|\Psi\rangle = \left( \cos \frac{\theta}{2} + e^{-i\alpha} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (14)$$

یا

$$|\Psi\rangle = \left( e^{-i\alpha} \cos \frac{\theta}{2} \right) |0\rangle + \left( \sin \frac{\theta}{2} \right) |1\rangle \quad (15)$$

با استفاده از روابط (۱۴) یا (۱۵) استراتژی‌های کوانتومی ماتریس‌های  $2 \times 2$  در فضای حاصلضرب تانسوری هستند که توسط بردارهای پایه  $|00\rangle$ ،  $|01\rangle$ ،  $|10\rangle$  و  $|11\rangle$  تولید می‌شوند، این ماتریس‌ها با نماد  $U$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۶، ۱۷، ۱۸].

$$\hat{U}(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & e^{-i\alpha} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] ; \quad \theta \in [0, \pi] \quad (16)$$

بازی کوانتومی با یک حالت درهم‌تنیده اولیه  $|\Psi\rangle = \hat{J}|00\rangle$  شروع می‌شود، که در آن  $J$  یک ماتریس متقارن به صورت زیر می‌باشد [۱۶، ۱۷، ۱۸].

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 & i \sin \frac{\gamma}{2} \\ 0 & \cos \frac{\gamma}{2} & -i \sin \frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & -i \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} & 0 \\ i \sin \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

پارامتر  $\gamma$  در ماتریس  $J$  فاکتور درهم‌تنیدگی است که درجه درهم‌تنیدگی را تنظیم نموده و همواره مقدار آن

به صورت  $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}$  می‌باشد. ماتریس  $\pi$  را به صورت زیر تعریف نمائید:

$$\pi = \begin{pmatrix} |W_1\rangle\langle W_1| & |W_2\rangle\langle W_2| \\ |W_3\rangle\langle W_3| & |W_4\rangle\langle W_4| \end{pmatrix} \quad (18)$$

که درایه‌های آن از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$|W_i\rangle = \hat{J}^* (\hat{u}_A \otimes \hat{u}_B) \hat{J} |00\rangle \quad (19)$$

که در آن ماتریس  $J^*$  ترانزپوز ماتریس  $J$  می‌باشد و  $u_A \otimes u_B$  ضرب تانسوری  $u_A$  و  $u_B$  است. در نهایت پیامدهای بازی برای بازیکنان  $A$  و  $B$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P_A &= I^t E_A \circ \pi I \\ P_B &= I^t E_B \circ \pi I \\ I^t &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن نماد  $\circ$  نشان‌دهنده حاصلضرب ماتریسی به صورت عنصر به عنصر می‌باشد و همچنین  $E_B$  و  $E_A$  ماتریس‌های پیامد بازیکنان در حالت کلاسیک هستند. بنابراین دینامیک‌های تکراری کوانتومی برای بازی‌های متقارن به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij} \left( (P_i \bar{x}_i)_j - \bar{x}_i^t P_i \bar{x}_i \right) \quad i = A ; j = 1, \dots, m \quad (21)$$

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij} \left( (P_i \bar{x}_i)_j - \bar{x}_i^t P_i \bar{x}_i \right) \quad i = B ; j = 1, \dots, m \quad (22)$$

هرگاه بازی به صورت نامتقارن باشد دینامیک‌های تکراری کوانتومی به صورت زیر تعریف می‌شوند که در آنها  $x_i$  بردارهای متناظر با استراتژی‌های بازیکنان و همچنین  $P_i$  ماتریس پیامد بازیکنان در حالت کوانتومی هستند:

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij} \left( (P_i \bar{x}_k)_j - \bar{x}_i^t A_i \bar{x}_k \right) \quad i = A ; k = B \quad (23)$$

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij} \left( (P_i \bar{x}_k)_j - \bar{x}_i^t A_i \bar{x}_k \right) \quad i = B ; k = A \quad (24)$$

## ۵ بازی معمای زندانی تکاملی کوانتومی دو‌کیوبیتی

معروف‌ترین بازی ابزاری، بازی معمای زندانی است. در این بازی دو مظنون توسط پلیس دستگیر شده‌اند. پلیس باید شواهد کافی برای محکومیت مظنونین جمع‌آوری کند و برای این کار به صورت جداگانه از مظنونین بازجویی می‌کند. اگر یکی از مظنونین با پلیس همکاری کند و مظنون دیگر عدم همکاری را ترجیح دهد، در این حالت مظنون اول آزاد و دیگری به یک سال حبس محکوم می‌شود. اگر هر دو عدم همکاری را در بازجویی انتخاب کنند هر دو مظنون در زندان تنها برای یک ماه حبس خواهند کشید. اما اگر هر دو همکاری کنند باید به مدت ۳ ماه هر مظنون حبس بکشد. هر مظنون باید بین استراتژی‌های همکاری  $C$ ، عدم همکاری  $D$  و یا ترکیبی از همکاری و عدم همکاری  $Q$  یکی را انتخاب کند. با توجه به روش کوانتومی بیان‌شده بازی را با یک حالت درهم‌تنیده اولیه  $|\Psi\rangle = \hat{J}|00\rangle$  شروع نموده و با استفاده از روابط (۱۶) تا (۲۰) استراتژی‌های کلاسیک بازیکنان را

توسط بردارهای پایه  $|0,0\rangle, |0,1\rangle, |1,0\rangle$  و  $|1,1\rangle$  در فضای هیلبرت به استراتژی‌های کوانتومی که ماتریس‌های  $2 \times 2$  در فضای حاصلضرب تانسوری هستند تبدیل می‌کنیم و سپس ماتریس پیامد بازی به کمک استراتژی‌های کوانتومی به صورت زیر محاسبه می‌شود [۲۰، ۱۹]:

$$C = \hat{U}(\cdot, \cdot) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}; D = \hat{U}(\pi, \cdot) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}; Q = \hat{U}(\cdot, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} i & \cdot \\ \cdot & -i \end{pmatrix} \quad (25)$$

|                    |                    |                    |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $R$                | $R$                | $S$                | $T$                | $\mu_{RP}(\gamma)$ | $\mu_{RP}(\gamma)$ |
| $T$                | $S$                | $P$                | $P$                | $\mu_{ST}(\gamma)$ | $\mu_{TS}(\gamma)$ |
| $\mu_{RP}(\gamma)$ | $\mu_{RP}(\gamma)$ | $\mu_{ST}(\gamma)$ | $\mu_{ST}(\gamma)$ | $R$                | $R$                |

ماتریس پیامد بازیکنان در حالت کوانتومی

که در آن مولفه‌های اول هر سطر و مولفه‌های دوم هر ستون ماتریس پیامد به ترتیب نشان‌دهنده پیامد بازیکنان  $A$  و  $B$  به ازای استراتژی‌های  $C, D$  و  $Q$  هستند و همچنین:

$$T = 5; R = 3; P = 2; S = 1 \quad (26)$$

$$\mu_{RP}(\gamma) = R \cos^2 \gamma + P \sin^2 \gamma \quad (26)$$

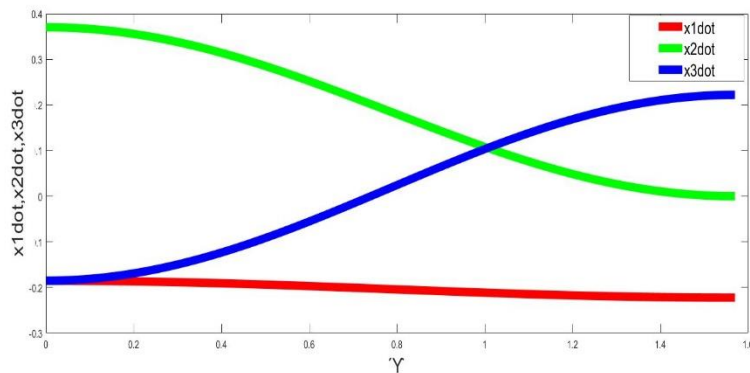
$$\mu_{ST}(\gamma) = S \cos^2 \gamma + T \sin^2 \gamma \quad (27)$$

$$\mu_{TS}(\gamma) = T \sin^2 \gamma + S \cos^2 \gamma \quad (28)$$

با توجه به مقارن بودن بازی، بررسی استراتژی‌هاییک بازیکن برای به دست آوردن جواب بازی کافی می‌باشد. بنابراین با استفاده از روابط (۲۱) دینامیک‌های تکراری بازیکن  $A$  به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \left( 3x_2 \cos^2 \gamma + 2x_2 \sin^2 \gamma - 6x_1 x_2 \cos^2 \gamma - 4x_1 x_2 \sin^2 \gamma \right. \\ &\quad \left. - 6x_1 x_2 \sin^2 \gamma - 6x_1 x_2 \cos^2 \gamma - 3x_1^2 - 2x_1^2 - 3x_1^2 - 6x_1 x_2 + 3x_1 + x_2 \right) \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left( 5x_1 \cos^2 \gamma - 6x_1 x_2 \cos^2 \gamma - 4x_1 x_2 \sin^2 \gamma - 6x_1 x_2 \sin^2 \gamma \right. \\ &\quad \left. - 6x_1 x_2 \cos^2 \gamma + x_2 \sin^2 \gamma - 3x_2^2 - 2x_2^2 - 3x_2^2 - 6x_1 x_2 + 2x_2 \right) \\ \dot{x}_3 &= x_3 \left( 3x_1 \cos^2 \gamma + 2x_1 \sin^2 \gamma + x_3 \cos^2 \gamma + 5x_3 \sin^2 \gamma - 6x_1 x_2 \cos^2 \gamma \right. \\ &\quad \left. - 4x_1 x_2 \sin^2 \gamma - 6x_1 x_2 \sin^2 \gamma - 6x_1 x_2 \cos^2 \gamma - 3x_3^2 - 2x_3^2 - 3x_3^2 - 6x_1 x_2 + 3x_3 \right) \end{aligned} \quad (29)$$

با توجه به شکل ۱ با افزایش فاکتور درهم‌تنیدگی  $\gamma$  تحت دینامیک‌های تکراری کوانتومی، جمعیتی که استراتژی‌های  $C$  و  $D$  را انتخاب نموده‌اند به شدت کوچک‌تر شده و جمعیتی که استراتژی  $Q$  را انتخاب نموده‌اند به شدت بزرگ‌تر می‌شوند. بنابراین ترکیب استراتژی کوانتومی  $(Q, Q)$  استراتژی پایدار تکاملی برای بازیکنان است که به ازای آن پیامد بازی برای هر کدام از بازیکنان به صورت  $P_A = 3$  و  $P_B = 3$  می‌باشد.



شکل ۱. تغییرات جمعیت متناظر با استراتژی‌های کوانتومی

### ۶ بازی معمای زندانی تکاملی کلاسیک

همان‌طور که در بخش ۵ بیان شد اگر یکی از مظنونین با پلیس همکاری کند و مظنون دیگر عدم همکاری را ترجیح دهد، در این حالت مظنون اول آزاد و دیگری به یک سال حبس محکوم می‌شود. اگر هر دو عدم همکاری را در بازجویی انتخاب کنند هر دو مظنون در زندان تنها برای یک ماه حبس خواهند کشید. اما اگر هر دو همکاری کنند باید به مدت ۳ ماه هر مظنون حبس بکشد. در حالت تکاملی کلاسیک هر مظنون برای حداقل رساندن مدت حبس خود می‌تواند استراتژی‌های همکاری  $C$  یا عدم همکاری  $D$  را انتخاب کند، بنابراین ماتریس پیامد بازی در این حالت به صورت زیر خواهد بود که مولفه‌های اول هر سطر و مولفه‌های دوم هر ستون آن به ترتیب نشان‌دهنده پیامد بازیکن  $A$  و  $B$  به‌زای استراتژی‌های  $C$  و  $D$  می‌باشد.

|        |        |
|--------|--------|
| $S, T$ | $R, R$ |
| $P, P$ | $T, S$ |

ماتریس پیامد بازیکنان در حالت کلاسیک

$$T = ۵ ; R = ۳ ; P = ۲ ; S = ۱$$

در این بازی نیز هر بازیکن تنها به دنبال حداکثر کردن پیامد خود می‌باشد و با توجه به متقارن بودن بازی بررسی استراتژی‌های یک بازیکن برای به‌دست آوردن جواب بازی کافی است. ماتریس پیامد برای بازیکن  $A$  به صورت زیر است.

$$A = \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۵ & ۲ \end{pmatrix} \quad (۳۰)$$

از آنجا که تنها دو استراتژی خالص وجود دارد، می‌توان جمعیتی با دو زیرجمعیت همکاری و عدم همکاری را به ترتیب با فراوانی  $x$  و  $۱-x$  ایجاد کرد، بنابراین بردار استراتژی‌ها به صورت زیر می‌باشد.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ۱-x \end{pmatrix} \quad (۳۱)$$

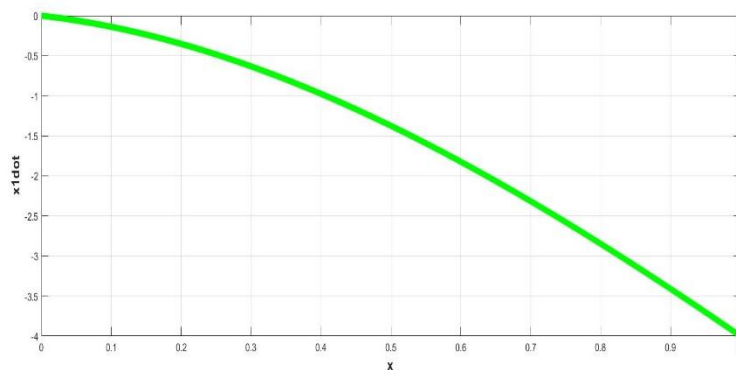
با استفاده از رابطه (۳) دینامیک‌های تکراری به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{x}_i = x_i(t) \left( (A\vec{x})_i - \vec{x}^t A \vec{x} \right) \quad (۳۲)$$

که با توجه به ماتریس  $A$  داریم:

$$\dot{x}_1 = 3x^3 - 4x^2 + x \quad (33)$$

با توجه به شکل ۲ با تغییر  $x$  تحت دینامیک‌های تکراری کلاسیک، جمعیتی که استراتژی همکاری را انتخاب نموده‌اند به شدت کوچک‌تر شده، بنابراین جمعیتی که عدم همکاری را انتخاب نموده‌اند به شدت بزرگ‌تر می‌شوند. در نتیجه ترکیب استراتژی عدم همکاری ( $D, D$ ) استراتژی پایدار تکاملی برای بازیکنان است. که به‌ازای آن پیامد بازی برای هر کدام از بازیکنان به صورت  $P_A = 2$  و  $P_B = 2$  می‌باشد.



شکل ۲. تغییرات جمعیت متناظر با استراتژی همکاری کلاسیک

## ۷ نتیجه‌گیری

نظریه بازی‌های تکاملی با ترکیب مفاهیم دینامیک غیرخطی و تئوری بازی‌ها، تجزیه و تحلیل دیگری از بازی‌ها ارائه می‌کند. در این مقاله یک مدل کوانتومی دوکیوبیتی برای بازی‌های تکاملی ارائه گردید و براساس آن استراتژی‌های کلاسیک بازیکنان به استراتژی‌های کوانتومی که بردارهایی در فضای هیلبرت هستند تبدیل شد. سپس ماتریس پیامد بازیکنان محاسبه و با استفاده از این ماتریس دینامیک‌های تکراری کوانتومی بازیکنان استخراج گردید. مشاهده شد که دینامیک‌های تکراری بازیکنان متأثر از فاکتور درهم‌تنیدگی  $\gamma$  در هر لحظه از بازی با تغییر  $\gamma$ ، تغییر خواهند کرد. با این ویژگی، بازی‌های تکاملی کلاسیک دیگر قادر به حل این گونه از بازی‌ها نبوده، چراکه در این بازی‌ها پیامد بازیکنان و تعادل نش بازی متأثر از عامل درهم‌تنیدگی می‌باشد، بنابراین به‌منظور حل این نوع از بازی‌ها روش تکاملی کوانتومی دوکیوبیتی به کار گرفته شد و بازی معمای زندانی با دو روش تکاملی کوانتومی دوکیوبیتی و تکاملی کلاسیک شبیه‌سازی گردید و مشاهده شد که در روش تکاملی کوانتومی با تغییر فاکتور درهم‌تنیدگی  $\gamma$  تحت دینامیک‌های تکراری هر کدام از بازیکنان استراتژی کوانتومی را انتخاب نمودند که این انتخاب پیامد بیشتری برای بازیکنان نسبت به روش تکاملی کلاسیک به‌همراه داشت. در پژوهش‌های آتی، می‌توان روش پیشنهادی در این مقاله را به‌طور مشابه در حل انواع مختلفی از مسایل نظریه بازی‌ها از جمله بازی‌های نامتقارن و بازی‌ها با اطلاعات ناقص به کار برد. به عنوان مثال، از نظریه بازی‌ها برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا در تحلیل پوششی داده‌ها و ارزیابی عملکرد ترکیبی استفاده شده

است [۲۱،۲۲]، که می‌توان این روش‌ها را، مبتنی بر نظریه بازی‌های تکاملی کوانتومی ارائه شده در این مقاله، و با هدف افزایش پیامدها بهبود و تعمیم بخشید.

## منابع

- [1] Hemati, H., Abrishamchi, A. (2020). Water allocation using game theory under climate change impact (case study: zarinehrood). *J. Water Clim. Chang.* 1–13. 10.2166/ wcc.2020.153.
- [2] H,Dawida . M,Y, Keoula. M, Kopel. P, M. Kort. (2023). Dynamic investment strategies and leadership in product innovation. *European Journal of Operational Research.* 306 (1), 431-447.
- [3] Khatami , S., shakibae, A. (2017). Analysis of the evolutionary game theory among Iran & Saudi Arabia in the context of genetic algorithm. *Quarterly Journal of Economical Modeling*, 11(38), 29-56.
- [4] Easley D. (2010). Reasoning about a highly connected world. *Networks, crowds, and markets.* New York, Cambridge University Press.
- [5] Olof, L. (2015). *Evolutionary game theory in biology.* Hammerstein, Peter. Elsevier.
- [6] Maynard, S. (1982). *Evolution and the theory of games.* Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [7] Wood, A. D., Mason, C. F., Finnoff, D. (2016). OPEC, the Seven Sisters, and Oil Market Dominance: An evolutionary game theory and agent-based modeling approach. *Journal of Economic Behavior and Organization* . 132. Part B. 66-78.
- [8] Adami, C., Schossau, J., & Hintze, A. (2016). Evolutionary game theory using agent-based Methods, *Physics of Life Reviews*, 19, 1- 26
- [9] Richard, H. (1994). *Complex economic dynamics volume.* MIT Press, Cambridge MA.
- [10] Cressman, R. (1992). *The Stability Cconcept of evolutionary game theory. A dynamic approach.* Springer-Verlag, New York.
- [11] Hofbauer, J, Sigmund, K. (1998). *evolutionary games and replicator dynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [12] Weibul, J. (1995). *Evolutionary game theory.* MIT Press, Cambridge, MA.
- [13] Barnum, H., Caves, C.M., Finkelstein, J., Fuch, C.A., Schack, R (1999). Quantum probability from decision theory.
- [14] Du, J., Ju, C., Li, H. (2005). Quantum entanglement helps in improving economic efficiency. *J. Phys. A Maths Gen.* 38, 1559–1565.
- [15] Levine, D. (2005). Quantum games have no news for economists.
- [16] Eisert, J., Wilkens M., Lewenstein M. (1999). Quantum games and quantum strategies. *Phys. Rev.Lett.* 83(15), 3077–3080.
- [17] Fr,aiewicz, P., Sladkowski. J. (2016). Quantum approach to Bertrand duopoly. *Quantum Inf. Process.* 15, 3636–3650.
- [18] Alonso-Sanz, R. (2017). Spatial correlated games. *R. Soc. Open Sci.* 4(6), 171361.
- [19] Iqbal, A., Chappell, J.M., Abbott, D. (2016). On the equivalence between non-factorizable mixed-strategy classical games and quantum games. *R. Soc. Open Sci.* 3, 150477.
- [20] Khan, S., Ramzam, M.R., Khan, M.K. (2010). Quantum model of Bertrand duopoly. *Chinese Phys. Lett.* 27, 080302.
- [21] Ashrafi, A., Amiri, M. (2020). Ranking efficient decision making units using cooperative game theory based on SBM input-oriented model and nucleolus value. *Journal of Operational Research and Its Applications*, 17(1), 68-73.
- [22] Hanoomarvar, Y. A., Seyedi, S. H., Rofoogarzade, M., Arasteh ,K. (2022). A model for developing the best strategy combination cased on balanced scorecard, fuzzy net present value and game Theory. *Journal of Operational Research and Its Applications*, 19(1), 81-97.