مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیست و یکم، شماره سوم (پیاپی ۸۲)،پاییز ۰۳، ص ص ۱۵۰-۱۳۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

برآورد بهینه پارامتر تنش-مقاومت تحت نمونه‌های سانسورشده نوع دوم در توزیع پواسون-نمایی

احمدرضا زنبوری[۱]، کریم زارع[۲*]، احسان زنبوری[۳]، سهیل شکری[٤]
۱- دانشجوی دکتری، گروه آمار، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران
۲- استادیار، گروه آمار، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران
۳- استادیار، گروه علوم پایه، واحد نورآباد ممسنی، دانشگاه آزاد اسلامی، نورآباد ممسنی، ایران
۴-استایار، گروه آمار، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۲۹ اردیبهشت ۱۴۰۲
پذیرش مقاله: ۹ مهر ۱۴۰۲

چکیده

در این مقاله، بهینه‌سازی پارامتر تنش-مقاومت تحت نمونه‌های سانسورشده نوع دوم برای توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای شکل یکسان مورد بررسی قرار گرفته است. در این مطالعه، برآوردگرهای بیزی با استفاده از زنجیره مارکوف مونت کارلو به منظور بهینه‌سازی پارامتر تنش-مقاومت به‌کار گرفته شده‌اند. همچنین، برای مقایسه و بررسی کارایی این برآوردگرها، یک مطالعه شبیه‌سازی انجام‌شده است و نتایج حاصل از برآوردگرهای پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت مبتنی بر نمونه‌های سانسورشده تحت توابع زیان با سایر برآوردگرها مقایسه شده‌اند. در انتها، برای تحلیل و بررسی کاربرد برآوردگرهای پیشنهادی، از مجموعه‌ای از داده‌های واقعی استفاده شده است.

کلمات کلیدی: برآورد بیز، توزیع پواسون-نمایی، برآورد ماکسیمم درستنمایی، سانسورشده نوع دوم، تابع زیان خطی نمایی، پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت.

۱ مقدمه

تنش مقاومت، در مهندسی مواد، به ویژگی‌هایی اطلاق می‌شود که نشانگر قدرت و مقاومت یک ماده در برابر تنش‌های مختلف است. این تنش‌ها شامل تنش کششی، تنش فشاری، تنش خمشی و تنش برشی می‌شوند. در فرآیندهای ساخت و استفاده از مواد، تحلیل و بهینه‌سازی تنش‌های مقاومتی ضروری است. بهینه‌سازی در زمینه تنش مقاومت از اهمیت بالایی برخوردار است. با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی، می‌توان عوامل موثر بر تنش مقاومت را شناسایی کرده و در نهایت طراحی و ساخت موادی را انجام داد که دارای تنش مقاومت بهینه باشند. این شامل انتخاب مواد مناسب، بهینه‌سازی ساختار داخلی ماده، استفاده از فرآیندهای تولید بهینه و محاسبات و

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Karim.zare@yahoo.com

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203] [Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

شبیه‌سازی‌های دقیق برای تحلیل تنش‌ها و تعیین رفتار ماده در شرایط مختلف می‌شود. مدل تنش-مقاومت یکی از مهم‌ترین مدل‌های قابلیت اطمینان است که کاربردهای زیادی در حوزه‌های مختلف از جمله علوم مهندسی، پزشکی و صنعتی دارد. این مدل به بررسی استقامت مؤلفه مورد نظر در برابر فشار وارده بر آن می‌پردازد که میزان فشار وارده یک متغیر تصادفی است. در حال حاضر مدل تنش-مقاومت مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است، به ویژه برای برآورد پارامتر $R = P(Y < X)$ که در آن X و Y متغیر تصادفی مستقل هستند. در یک سیستم X نماد مقاومت و Y نماد تنش وارد بر آن در نظر گرفته می‌شود و پارامتر R به عنوان پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت تعریف می‌شود. بر طبق این تعریف اگر تنش وارد بر سیستم از مقاومت سیستم بیشتر باشد، سیستم با شکست روبه‌رو می‌شود. به عبارت دیگر سیستم تا زمانی با موفقیت به عملکرد خود ادامه می‌دهد که $Y > X$ باشد، یعنی سیستم مقاومت لازم برای غلبه بر تنشی که در معرض آن قرارگرفته را داشته باشد. مدل تنش-مقاومت اولین بار توسط بیرن‌باو [۱] مطرح شد و بعداً توسط بیرن‌باوم و مک کارتی [۲] گسترش یافت. پژوهش‌های بسیاری در رابطه با پارامتر قابلیت اطمینان تنش-مقاومت وجود دارد. مساله برآورد R به طور گسترده‌ای تحت فرضیات توزیعی مختلف روی Xو Y برای انواع گوناگونی از داده‌ها مثل داده‌های کامل و داده‌های سانسورشده مورد مطالعه قرار گرفته است. برای اطلاع بیشتر در مورد پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت و کاربرد آن می‌توان به کوتز و همکاران [۳] مراجعه کرد. هم‌چنین در مورد تاریخچه پارامتر R می‌توان به [۴] مراجعه کرد. نادب و ترابی [۵] یک روش کلی برای انجام آزمون نیکویی برازش برای خانواده توزیع‌های مکان-مقیاس با استفاده از داده‌های سانسورشده فزاینده نوع دوم ارایه دادند و ویژگی‌های آن را بررسی کردند. کهن‌سال و همکاران [۶] برآورد بیزی پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت، در توزیع لوماکس، تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی را در سه حالت بررسی کردند. هم‌چنین محققانی چون بالاکریشنان و همکاران [۷و۸] ، پاکیاری و بالاکریشنان [۹، ۱۰] ، وانگ [۱۱] در زمینه آزمون نیکویی برازش با به‌کارگیری داده‌های سانسورشده و به ویژه سانسور فزاینده نوع دوم به منظور صرفه‌جویی در وقت و هزینه مطالعاتی انجام داده‌اند. قابل ذکر است که جهت مطالعه بیشتر در زمینه سانسور فزاینده نوع دوم می‌توان به بالاکریشنان و آ گاروالا [۱۲] مراجعه کرد.

در آزمایش‌های طول عمر و قابلیت اطمینان، موارد زیادی موجود دارد که واحدهای آزمایشی قبل از مشاهده زمان خرابی یا شکست آنها از آزمون حذف یا کنار گذاشته می‌شوند که این حذف ممکن است به‌صورت غیرعمدی رخ دهد. معمولاً حذف واحدهای آزمایشی، از قبل طراحی‌شده و عمدی است که به دلایلی همانند صرفه‌جویی در زمان و هزینه توسط آزمونگر صورت می‌گیرد. در این حالت گفته می‌شود که سانسور رخ داده است. یعنی تنها بخشی از داده‌های طول عمر مشاهده می‌شود. در این حالت نمونه مشاهده‌شده را نمونه سانسورشده می‌نامند. سانسورهای معمولی نوع اول و نوع دوم رایج‌ترین نوع سانسورها هستند. در طرح سانسورشده نوع دوم فقط rتای اول مشاهدات مرتب شده از یک نمونه تصادفی قابل مشاهده می‌باشند. این نوع طرح سانسور اغلب در آزمون‌های طول عمر به کار می‌رود. در این حالت تمام n عضو موجود مورد آزمایش

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203] [Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

قرار می گیرند. اما به جای اینکه آزمایش را تا زمان از کار افتادگی تمام اعضا ادامه یابد، تا هنگامی که r عضو از کار بیافتند، ادامه می‌یابد. این کار باعث صرفه‌جویی در زمان و هزینه‌های آزمایش می‌شود.

تحقیقات مختلفی پیرامون پارامتر R تحت طرح سانسورهای مختلف انجام شده است که می‌توان به برخی از آنها مانند اصغرزاده و کاظمی [۱۳] ، اصغرزاده و همکاران [۱۴] ، ساراچوغلو همکاران [۱۵] و رضایی و همکاران [۱۶] اشاره کرد. در سال‌های اخیر احمدی و غفوری [۱۷] به مطالعه مدل تنش-مقاومت چند مولفه‌ای در توزیع نیمه-نرمال تعمیم‌یافته تحت سانسور فزاینده پرداختند. هم‌چنین ماوریا و تریپاتی [۱۸] و کهن‌سال و رضاخواه [۱۹] مدل تنش-مقاومت چند مولفه‌ای را تحت سانسور فزاینده به ترتیب برای توزیع رایلی دوپارامتری و توزیع گومپرتز بررسی کردند. هم‌چنین کهن‌سال [۲۰] پارامتر پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را در توزیع بور نوع ۷، را تحت سانسور فزاینده پیوندی مورد مطالعه قرار داد.

هدف نویسندگان این مقاله از نگارش آن بررسی برآورد پارامتر $R = P(Y < X)$ بر اساس طرح سانسور راست نوع دوم در توزیع پواسون-نمایی است و برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و بیز برای دو تابع زیان مربعات خطا و خطی نمایی محاسبه شده است. در واقع نویسندگان با استفاده از برآوردگرهای بهینه با محاسبات و شبیه‌سازی‌های دقیق به بررسی برآورد پارامتر $R = P(Y < X)$ پرداخته‌اند که به بهینه‌سازی فرایندها در کاربرد کمک نماید. برآوردگرهای بیز با برآوردگرهای ماک‌سیمم درستنمایی مقایسه شده است که سودمندی برآوردگرها را نشان داد. همچنین بازه اطمینان نرمال نیز برای برآوردگرها نیز بررسی شده است. هم‌چنین در این راستا در شبیه‌سازی از زنجیره مارکف جهت محاسبات استفاده شده است که در مدل‌سازی دنیای واقعی کاربردهای زیادی‌دارد.

در مطالعه شبیه سازی نیز برآوردگرهای معرفی‌شده به صورت کامل با هم مقایسه شده‌اند. ایده اصلی از مطالعه محامد [۲۱] گرفته شده است . محامد داده های کامل را برای بررسی پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در نظر گرفته اند و برآوردگرهای بیز تنها تحت تابع زیان مربعات مورد بررسی قرار دادند. همچنین ایشان توزیع با تابع چگالی پواسن-نمایی با پارامترشکل یکسان در نظر گرفتند که در این مطالعه توزیع با پارمتر مقیاس یکسان در نظر گرفته شده است.

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع پواسون-نمایی به ترتیب به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$f_X(x) = \frac{\theta\lambda e^{-\lambda x - \theta e^{-\lambda x}}}{1 - e^{-\theta}}, \qquad x > 0, \theta > 0, \lambda > 0 \tag{1}$$

$$F_X(x) = 1 - \frac{1 - e^{-\theta e^{-\lambda x}}}{1 - e^{-\theta}}, \qquad x > 0, \theta > 0, \lambda > 0 \tag{2}$$

که λ پارامتر مقیاس و θ پارامتر شکل هستند. در این مقاله توزیع با تابع چگالی احتمال(۱) و تابع توزیع تجمعی (۲) با نماد $PE(\theta, \lambda)$ نشان داده می‌شود. در ادامه به بررسی برآوردگرهای پارامتر R بر اساس روش‌های برآوردی اشاره‌شده پرداخته می‌شود. در ادامه در ابتدا در بخش ۲ به محاسبه برآوردگر ماکسیمم

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203]
[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

درستنمایی پارامتر R پرداخته می شود. در بخش های ۳ و ۴ به ترتیب بازه اطمینان نرمال و برآوردگر بیز پارامتر قابلیت اعتماد تنش مقاومت محاسبه می‌شود. در آخرین بخش نیز با استفاده از شبیه‌سازی و مجموعه داده‌های واقعی به تحلیل روش‌های برآورد پرداخته می‌شود.

۲ برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامتر R

فرض کنید $X \sim PE(\theta_1, \lambda)$ و $Y \sim PE(\theta_2, \lambda)$ متغیرهای تصادفی مستقل با پارامترهای شکل θ_1 و θ_2 و پارامتر مقیاس یکسان λ باشند. به‌سادگی مشاهده می‌شود که

$$R = P(Y < X) = \int_0^{\infty} F_Y(t) f_x(t)\,dt = 1 - \ldots \tag{۳}$$

بنابراین $x = (X_{(1)}, \ldots, X_{(r_1)})$ و $y = (Y_{(1)}, \ldots, Y_{(r_2)})$ نشان‌دهنده نمونه‌های مرتب سانسورشده نوع دوم باشند، تابع درستنمایی به‌صورت

$$L(\theta_1, \theta_2, \lambda \mid x, y) \propto \prod_{i=1}^{r_1} f_X(x_{(i)})[1 - F_X(x_{(r)})]^{(n_1 - r_1)} \prod_{j=1}^{r_2} f_Y(y_j)[1 - F_Y(y_{(j)})]^{(n_2 - r_2)} \tag{۴}$$

حاصل می‌شود. با توجه به رابطه (4) لگاریتم تابع درستنمایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\ln L(\theta_1, \theta_2, \lambda \mid x, y) \propto{}& r_1 \ln\theta_1 + r_2 \ln\theta_2 + (r_1 + r_2)\ln\lambda - n_1 \ln(1 - e^{(-\theta_1)}) - n_2 \ln(1 - e^{(-\theta_2)}) \\ & - \sum_{i=1}^{r_1} (\lambda x_{(i)} + \theta_1 e^{-\lambda x_{(i)}}) + (n_1 - r_1)\ln(1 - e^{\theta_1 e^{-\theta_1 \lambda x_{(r_1)}}}) \\ & - \sum_{j=1}^{r_2} (\lambda y_{(j)} + \theta_2 e^{-\lambda y_{(j)}}) + (n_2 - r_2)\ln(1 - e^{\theta_2 e^{-\theta_2 \lambda y_{(r_2)}}})\end{aligned}$$

با مشتق گیری از تابع لگاریتم درستنمایی نسبت به هریک از پارامترها نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = \frac{r_1}{\theta_1} - \frac{n_1 e^{-\theta_1}}{1 - e^{-\theta_1}} = \sum_{i=1}^{r_1} e^{-\lambda x_{(i)}} + \frac{(n_1 - r_1) e^{-\lambda x_{(r_1)} - \theta_1 e^{-\theta_1 \lambda x_{(r_1)}}}}{1 - e^{-\theta_1 \lambda x_{(r_1)}}},$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = \frac{r_2}{\theta_2} - \frac{n_2 e^{-\theta_2}}{1 - e^{-\theta_2}} = \sum_{j=1}^{r_2} e^{-\lambda y_{(j)}} + \frac{(n_2 - r_2) e^{-\lambda y_{(r_2)} - \theta_2 e^{-\theta_2 \lambda y_{(r_2)}}}}{1 - e^{-\theta_2 \lambda y_{(r_2)}}},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} ={}& \frac{r_1 + r_2}{\lambda} - \sum_{i=1}^{r_1} x_{(i)} e^{-\lambda x_{(i)}} + (n_1 - r_1)\frac{\theta_1 x_{(r_1)} e^{-\lambda x_{(r_1)} - \theta_1 e^{-\lambda x(r_1)}}}{(1 - e^{-\theta_1 e^{-\lambda x(r_1)}})} \\ & - \sum_{j=1}^{r_2} y_{(j)} + \theta_2 \sum_{j=1}^{r_2} y_{(j)} e^{-\lambda y_{(j)}} + (n_2 - r_2)\frac{\theta_2 y_{(r_2)} e^{-\lambda y_{(r_1)} - \theta_2 e^{-\lambda y(r_2)}}}{(1 - e^{-\theta_2 e^{-\lambda y(r_2)}})}\end{aligned}$$

با استفاده از معادله‌های درستنمایی و با حل آن‌ها می‌توان برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای θ_1 ، θ_2 و λ را محاسبه کرد. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی $\hat{R}$ با جایگذاری θ_1 و θ_2 در معادله‌ی (۳)

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203]

به‌دست می‌آید. همان‌طور که ملاحظه می‌شود نمی‌توان فرم بسته‌ای برای برآوردگرهای θ_1 و θ_2 و پارامتر R یافت که راه‌حل دستیابی به آن استفاده از روش‌های عددی است. حل چنین دستگاه معادلاتی با استفاده از نرم افزار به‌سادگی امکان‌پذیر است. در این مطالعه با استفاده از نرم افزار R و تابع nlm برای محاسبه کمک گرفته شده است که در بخش مطالعه عددی مرور می‌شود.

۳ بازه اطمینان تقریباً نرمال برای R

بازه اطمینان تقریباً نرمال (AN) با استفاده از معکوس ماتریس اطلاع فیشر مشاهده‌شده و به‌کارگیری روش دلتا حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن بردار پارامتری $\Theta=(\theta_1,\theta_2,\lambda)$ واضح است که ماتریس اطلاع فیشر مشاهده‌شده به‌صورت زیر است:

$$I(\Theta)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial^2\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\lambda\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\lambda\partial\theta_2} \\ \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\theta_1\partial\lambda} & \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\theta_1^2} & \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \\ \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\theta_2\partial\lambda} & \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\theta_2^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

به‌سادگی ملاحظه می‌شود که $I_{23}=I_{32}=0$ پس با معکوس کردن ماتریس اطلاع فیشر مشاهده‌شده، ماتریس کوواریانس تقریبی $a=[A_{ij}]$ به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$A=\frac{1}{u}\begin{pmatrix} I_{22}I_{33} & -I_{12}I_{33} & -I_{22}I_{13} \\ -I_{21}I_{33} & I_{11}I_{33}-I_{13}I_{31} & I_{21}I_{13} \\ -I_{22}I_{31} & I_{12}I_{31} & I_{11}I_{22}-I_{12}I_{21} \end{pmatrix}$$

که در آن $u=(I_{11}I_{22}I_{33}-I_{12}I_{21}I_{33}-I_{13}I_{31}I_{22}$ برای یافتن واریانس $R(V)$ از روش دلتا استفاده می‌شود که با توجه به رابطه (۳)می‌توان نوشت:

$$R=g(\theta_1,\theta_2) \tag{۵}$$

که $g(\theta_1,\theta_2)=1-\frac{1}{(1-e^{-\theta_2})}[1-\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\frac{1-e^{-(\theta_1+\theta_2)}}{1-e^{-\theta_1}}]$ با به‌کارگیری روش دلتا عبارت زیر حاصل می‌شود:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203]

که در آن و با جایگذاری عبارات قبل،

$$V=b^{t}Ab=\frac{1}{u}[c_{1}^{2}I_{22}I_{33}+c_{2}^{2}(I_{11}I_{33}-I_{13}^{2})+c_{3}^{2}(I_{11}I_{22}-I_{12}^{2})-2c_{1}c_{2}I_{12}I_{33}-2c_{1}c_{3}I_{22}I_{13}+2c_{2}c_{3}I_{12}I_{13}]$$

حاصل می‌شود. اکنون برای برآورد V کافی است که به جای پارامترها، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی آن‌ها قرار داده شود. بنابراین بازه اطمینان تقریب نرمال پارامتر R به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(R-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V},\,R+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V}\right), \tag{۶}$$

که Z_{α} نشان‌دهنده چندک مرتبه α توزیع نرمال استاندارد است.

٤ برآوردگر بیز پارامتر R

با استفاده از برآوردگرهای بیز، می‌توان بهبود دقت و قدرت استنتاج در حوزه‌های مختلف داشت. به طور معمول، در فرآیندهای تصمیم‌گیری و تحلیل داده‌ها، داده‌های موجود همواره با عدم قطعیت روبه‌رو هستند. برآوردگر بیز این عدم قطعیت را با ارایه تخمین‌های احتمالی از پارامترها به پژوهشگر ما کمک می‌کندکه در مسایل استنتاجی و تصمیم‌گیری به صورت دقیق‌تری تصمیم‌گیری نماید. با داشتن توزیع احتمالی پارامترها، می‌توان بیشترین اطمینان را در مورد تخمین‌ها محاسبه کرد و در تصمیم‌گیری‌های حساس و پیچیده، با رعایت عدم قطعیت، تصمیمات بهتری گرفته شود. بهبود استنتاج در برآوردگرهای بیزی به معنای به‌دست آوردن تخمین‌های دقیق‌تر و قابل اعتماد است. این به ما این امکان را می‌دهد که در تحلیل داده‌ها و ارایه پیش‌بینی‌ها، نتایجی کیفیت بالا و قابل اطمینان داشته باشیم. به طور خلاصه، برآوردگر بیز به عنوان یک برآوردگر بهینه، با استفاده از مدیریت عدم قطعیت و ارایه تخمین‌های احتمالی، می‌تواند به دقت و قدرت استنتاج بیشتری دست یابد. این ابزار قدرتمند در تحلیل داده‌ها، پیش‌بینی‌ها و تصمیم‌گیری‌های مبتنی بر اطلاعات موجود، به ما این امکان را می‌دهد که بهترین تصمیمات

$$b=\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial \lambda}\\ \frac{\partial g}{\partial \theta_{1}}\\ \frac{\partial g}{\partial \theta_{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{1}\\ c_{2}\\ c_{3}\end{pmatrix} \tag{۷}$$

را در مواجهه با عدم قطعیت داشته باشیم.

تفاوت برآوردگرهای بیزی با برآوردگرهای کلاسیک که تمایز اساسی ایجاد می‌کند؛ در واقع فرض متغیر تصادفی پارامتر توزیع در برآورد بیزی است. در بسیاری از شرایط رهیافت بیزی بهتر از روش کلاسیک برای نمونه با حجم کوچک است، مشروط بر اینکه اطلاعات اضافی در مورد پارامتر در دسترس باشد. برآوردگرهای بیز بیشتر بر اساس تابع زیان مربع خطا مورد بررسی قرار گرفته‌اند. قابل ذکر است که تابع زیان مربع خطا جریمه یکسانی را برای کم برآوردی و بیش برآوردی برآوردگرها در نظر می‌گیرد که در برخی کاربردهای عملی

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203]

نامناسب است. به عنوان مثال در محاسبه مشخصه‌های قابلیت اعتماد، مساله بیش برآوردی بسیار خطرناکتر از کم برآوردی است. یکی از مهم‌ترین توابع زیانی که این محدودیت را اصلاح می‌کند، تابع زیان خطی نمایی[۱] است که به‌صورت

$$L(g(\theta),\hat{g}(\theta))=\exp\{v(\hat{g}(\theta)-g(\theta))\}-v(\hat{g}(\theta)-g(\theta))-1,\quad v\neq 0 \tag{8}$$

تعریف می‌شود که علامت و بزرگی پارامتر شکل v جهت و میزان تقارن تابع زیان خطی را نشان می دهد. برآوردگر بیز $g(\theta)$ تحت این تابع زیان برابر می‌شود با

در ادامه این بخش، با استفاده از توابع زیان مربع خطا و تابع زیان خطی نمایی برآوردگرهای بیز پارامتر R محاسبه می‌شوند. ابتدا فرض می‌شود که متغیرهای تصادفی θ_1 ، θ_2 و λ مستقل از یکدیگر بوده و دارای توزیع پیشین گاما به‌صورت زیر هستند:

$$\theta_1\sim\Gamma(a_1,b_1),\qquad \theta_2\sim\Gamma(a_2,b_2),\qquad \lambda\sim\Gamma(a_3,b_3)$$

$$G(x)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}\exp[-bx]\qquad x>0$$

بنابراین اکنون می‌توان تابع چگالی پسین توأم θ_1، θ_2 و λ را به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\pi(\theta_1,\theta_2,\lambda\mid x,y)&=G_{\theta_1|\lambda}\Big(a_1+r_1,b_1+\sum_{i=1}^{r_1}e^{-\lambda x_{(i)}}\Big)G_{\theta_2|\lambda}\Big(a_2+r_2,b_2+\sum_{j=1}^{r_2}e^{-\lambda y_{(j)}}\Big)\\&\times G_{\lambda}\Big(a_3+r_1+r_2,b_3+\sum_{i=1}^{r_1}x_{(i)}+\sum_{j=1}^{r_2}y_{(j)}\Big)H(\theta_1,\theta_2,\lambda)\end{aligned} \tag{9}$$

که در آن

$$H(\theta_1,\theta_2,\lambda)=\frac{\prod_{i=1}^{r_1}\left(\frac{1-e^{-\theta_1 e^{-\lambda x(i)}}}{1-e^{-\theta_1}}\right)^{r_1}\prod_{j=2}^{r_2}\left(\frac{1-e^{-\theta_2 e^{-\lambda t(j)}}}{1-e^{-\theta_2}}\right)^{r_2}}{(1-e^{-\theta_1})^{r_1}(1-e^{-\theta_2})^{r_2}}.$$

و تابع G نشان‌دهنده توزیع گاما است. در ادامه جهت محاسبه تقریبی از برآوردگرهای بیز و ساختن ناحیه‌های اعتبار مرتفع‌ترین چگالی پسین (HPD) از روش نمونه‌گیری زنجیر مارکوف مونت کارلو استفاده می‌شود. همانطور که می‌دانیم ناحیه اعتبار مرتفع‌ترین چگالی پسین $100(1-\alpha)\%(HPD)$ برای هر متغیر θ زیرمجموعه C از فضای پارامتری Θ به فرم

$$\begin{gathered}\hat{g}_{LL}(\theta)=-\frac{1}{v}\log(E_\theta[e^{-vg(\theta)}\mid data])\\ C=\{\theta\in\Theta\mid\pi(\theta\mid x)>k(\alpha)\}\end{gathered} \tag{10}$$

[1] Linex Loss Function

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203]

است که در آن $k(\alpha)$ مقداری است که $P(C \mid x) = ۱-\alpha$ باشد. در ادامه ما با استفاده از زنجیر مارکوف مونت کارلو چگالی‌های پسین شرطی تولید کرده‌ایم.

زنجیره مارکف که به افتخار آندری مارکوف ریاضی‌دان اهل روسیه این گونه نام‌گذاری‌شده یک سیستم ریاضی است که در آن انتقال از یک حالت به حالت دیگر صورت می‌گیرد که البته تعداد این حالات قابل شمارش است. زنجیره مارکف یک فرایند تصادفی بدون حافظه‌است بدین معنی که توزیع احتمال شرطی حالت بعد تنها به حالت فعلی بستگی دارد و به وقایع قبل از آن وابسته نیست. این نوع بدون حافظه بودن خاصیت مارکف نام دارد. زنجیره مارکف در مدل‌سازی دنیای واقعی کاربردهای زیادی دارد. روش های زنجیره مارکف مونت کارلو (که شامل روش های قدم زدن تصادفی مونت کارلو می‌باشد) دسته‌ای از الگوریتم‌هاست برای نمونه‌برداری از توزیع‌های احتمال که مبنای آن ساختن یک زنجیره مارکف با ویژگی‌های مطلوب است. سپس حالت زنجیره پس از تعداد بسیار زیادی مرحله به عنوان نمونه‌ای از توزیع مطلوب استفاده می شود. کیفیت این نمونه متناسب با افزایش تعداد مراحل افزایش می‌یابد. معمولاً ساختن یک زنجیره مارکف با ویژگی‌های مطلوب کار ساده‌ای است. مشکل اصلی تعداد مراحل مورد نیاز است برای اینکه حالت زنجیره با خطای قابل قبولی به یک توزیع ثابت همگرا شود. زنجیر خوب زنجیره‌ای است که در ان با شروع از یک موقعیت دلخواه خیلی سریع به توزیع ثابت همگرا شود. به طور معمول زنجیر مارکف مونت کارلو برای نمونه برداری توزیع مورد نظر ما را فقط تخمین می‌زند. به دلیل این‌که این توزیع همواره تحت تاثیر نقطه شروع است. ولی الگوریتم های پیچیده‌ای وجود دارند که اساس آن‌ها زنجیره‌های مارکف مونت کارلو است و با محاسبات اضافی تاثیر نقطه شروع را از بین برده و توزیع موردنظر ما را به طور دقیق مشخص می‌کنند.

در ادامه جهت برآورد پارامترها بر اساس تکنیک‌های زنجیر مارکف مونت کارلو ابتدا با استفاده از نمونه‌گیری گیبز از طریق الگوریتم متروپولیس-هستینگس تولید نمونه از توزیع پسین تولید می‌شود و سپس برآوردگرها محاسبه می‌گردد. همان‌گونه که اشاره شد، با استفاده از زنجیر مارکوف مونت با توجه به رابطه (۱۰) چگالی‌های سین شرطی تولید می‌شود که مراحل تولید چگالی‌های پسین شرطی با استفاده از زنجیر مارکوف مونت کارلو برای $\theta_۱$ ، $\theta_۲$ و λ و نمونه‌های تصادفی x و y به اندازه $m_۱$ و $m_۲$ به‌صورت زیر هستند:

مرحله اول: تولید $\lambda^{(k)}$ از $Gamma(a_۳+m_۱+m_۲, b_۳+\sum_{j=۱}^{m_۱}x_j+\sum_{j=۱}^{m_۲}y_j)$

مرحله دوم: تولید $\theta_۱^{(k)}$ از $Gamma(a_۱+m_۱, b_۱+\sum_{j=۱}^{m_۱}e^{-\lambda x_j})$

مرحله سوم: تولید $\theta_۲^{(k)}$ از $Gamma(a_۲+m_۲, b_۲+\sum_{j=۱}^{m_۲}e^{-\lambda y_j})$

مرحله چهارم: $R^{(k)}$ را با جایگذاری $\theta_۱^{(k)}$ و $\theta_۲^{(k)}$ در رابطه (۳) محاسبه می‌شود.

مرحله پنجم: مراحل ۱-۴ M -بار تکرار می‌شود.

برآوردگرهای بیز پارامتر R تحت توابع زیان مربع خطا و خطی نمایی به صورت زیر حاصل می‌شوند:

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203] [Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

$$R_S = \frac{\sum_{k=1}^{M} R^{(k)} H(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\sum_{k=1}^{M} H(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \lambda^{(k)})}, \qquad R_{LL} = -\frac{1}{\nu} \ln \left[\frac{\sum_{k=1}^{M} e^{-\nu R^{(k)}} \cdot H(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\sum_{k=1}^{M} H(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \lambda^{(k)})} \right]$$

بازه‌های اطمینان HPD

بازه‌های اطمینان HPD در سطح $(1-\alpha)$ که احتمال برای هر نقطه درون بازه، باید بیشتر از هر نقطه خارج از بازه باشد، در نظر گرفته می‌شود. بازه اطمینان HPD کوتاه‌ترین بازه اطمینان در میان تمامی بازه‌های اطمینان ممکن با احتمال یکسان $(1-\alpha)$ است. در این بخش با کمک ایده مطرح‌شده توسط چن و شائو [۲۲] الگوریتم زیر را برای محاسبه بازه اطمینان HPD در سطح $100(1-\alpha)\%$ پارامتر R ارایه می‌شود.

الگوریتم Chen-Shao

۱. محاسبه نمونه $(R_j,\ j=1,2,\dots,M)$ با استفاده از نمونه‌گیری MCMC از رابطه (۳).

۲. مقادیر نمونه‌های $(R_j,\ j=1,2,\dots,M)$ به‌صورت $R_{(1)}, R_{(2)}, \dots, R_{(M)}$ مرتب می‌شوند.

۳. بازه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(R_{(j)}, R_{(j+[M(1-\alpha)])}), \qquad j=1,2,\dots,M-[(1-\alpha)M],$$

که در آن $[M]$ بزرگترین عدد صحیح کوچک‌تر یا برابر با $[M]$ است.

۴. بازه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ HPD حاصل در گام (۳) را به‌طور مشابه می‌توان برای پارامترهای θ و λ به‌دست آورد که از تکرار مجدد ارایه روند خودداری شده است.

۵ تحلیل داده‌ها

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی و مجموعه داده‌های واقعی به تحلیل روش‌های برآورد پرداخته می‌شود. در زیربخش شبیه‌سازی عملکرد برآوردگرها و فاصله اطمینان پیشنهادی بررسی می‌شود. سپس با استفاده از داده واقعی نتایج تئوری در عمل بررسی می‌شوند.

۵-۱ شبیه‌سازی

در بخش‌های قبل با استفاده از دیدگاه‌های کلاسیک و بیز، برآوردگرهای مختلفی را برای پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت R محاسبه شده است. در این بخش، مطالعه شبیه‌سازی با فرض دو حالت برای بررسی رفتار این برآوردگرها انجام می‌شود. در حالت اول فرض می‌شود که جامعه اول (X) دارای توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_1,\lambda)=(1,2)$ و جامعه دوم (Y) دارای توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_1,\lambda)=(3,2)$ است. در حالت دوم نیز جامعه اول (X) دارای توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_1,\lambda)=(3,2)$ و جامعه دوم (Y) دارای توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_1,\lambda)=(4,2)$ فرض می‌شود.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203]

برای ارزیابی عملکرد برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی کافی است تا تحت نمونه‌های سانسورشده نوع دوم تعدادی R شبیه‌سازی شود. بدین منظور۱۰۰۰ بار نمونه‌هایی به اندازه $n_۱$ از توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_۱,\lambda)=(۱,۲)$ و نمونه‌هایی به اندازه $n_۲$ از توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای $(\theta_۱,\lambda)=(۳,۲)$ تولید می‌شوند. نمونه توزیع پواسن-نمایی تحت نمونه‌های سانسور نوع دوم با توجه به رابطه (۴) برای مقادیر مختلف $(r_۱,r_۲)$ تولید شده است. با توجه به الگوی سانسور نوع دوم که مقادیر $(r_۱,r_۲)$ ثابت در نظر گرفته می‌شود، با فرض مقادیر مختلف برآوردگرها مقایسه شده‌اند. سپس با حل معادله‌های درستنمایی و با استفاده از رابطه (۳) برآوردگر R در هر تکرار محاسبه می‌شود. عملکرد برآورگرهای بیزی تحت نمونه‌های سانسورشده نوع دوم با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو مورد بررسی قرار می‌گیرد. جهت تولید نمونه با توجه به رابطه (۱۰) برای مقادیر مختلف $(r_۱,r_۲)$ با استفاده از الگوریتم متروپولیس-هستینگس توزیع‌های پسین برآوردگرها M تولید می‌شود و سپس برآوردگرها تحت تابع زیان‌های معرفی شده محاسبه می‌شوند. باید توجه کرد که در الگوریتم MCMC تعداد تکرارها $M=۲۰۰۰$ است. علاوه بر آن، استنباط بیزی با استفاده از توزیع پیشین به‌صورت $a_۱=b_۱=a_۲=b_۲=۰/۰۰۰۱$ در نظر گرفته شده است.

فرض کنید R_i برآورد پارامتر R در تکرار iام به ازای $i=۱,۲,...$ باشد. در این صورت برآورد حداقل مربعات خطا (MSE) به‌صورت $\frac{۱}{۱۰۰۰}\sum_{i=۱}^{۱۰۰۰}(R_i-R)^۲$ خواهد بود. مقادیر برآوردگر حداقل مربعات خطا برای مقادیر مختلف طرح‌های سانسور و پارامترها در جدول ۱ گزارش شده است. هم‌چنین بازه‌های اطمینان AN و HPD در سطح ۹۵% محاسبه شده‌اند که نتایج حاصل نیز در جدول ۱ قابل مشاهده است.

جدول ۱. برآورد و حداقل مربعات خطای پارامتر R

					Bayes	
$n_۱$	$n_۲$	R	(r_1,r_2)	MLE	SEL	LINEX
۴۰	۵۰	۰/۲۰	(۱۰,۱۰)	۰/۲۷۳۴(۰/۰۰۴۹)	۰/۲۷۱۳(۰/۰۰۴۶)	۰/۲۷۰۳(۰/۰۰۲۴)
			(۲۰,۲۰)	۰/۱۵۴۸(۰/۰۰۲۳)	۰/۲۷۱۷(۰/۰۰۴۷)	۰/۲۷۱۶(۰/۰۰۲۲)
			(۲۰,۳۰)	۰/۳۴۰۲(۰/۰۱۸۸)	۰/۲۶۲۱(۰/۰۰۳۴)	۰/۲۶۲۱(۰/۰۰۰۱)
			(۳۰,۴۰)	۰/۳۱۸۸(۰/۰۱۳۳)	۰/۲۰۱۲(۰/۰۰۰۳)	۰/۱۵۸۶(۰/۰۰۰۴)
			(۴۰,۵۰)	۰/۲۹۶۷(۰/۰۰۸۷)	۰/۲۱۳۶(۰/۰۰۰۵)	۰/۱۹۱۱(۰/۰۰۰۳)
		۰/۴۲	(۱۰,۱۰)	۰/۴۱۷۴(۰/۰۰۰۵)	۰/۴۰۵۷(۰/۰۹۵۹)	۰/۴۰۵۵(۰/۰۰۲۹)
			(۲۰,۲۰)	۰/۵۰۴۲(۰/۰۰۷۵)	۰/۴۲۵۰(۰/۰۰۵۷)	۰/۴۲۴۹(۰/۰۰۰۴)
			(۲۰,۳۰)	۰/۵۲۹۵(۰/۰۱۲۵)	۰/۴۳۷۹(۰/۰۰۰۴)	۰/۴۳۶۰(۰/۰۰۰۵)
			(۳۰,۴۰)	۰/۵۲۹۵(۰/۰۱۱۵)	۰/۴۳۶۴(۰/۰۰۰۳)	۰/۴۳۶۴(۰/۰۰۰۴)
			(۴۰,۵۰)	۰/۴۷۸۵(۰/۰۰۳۷)	۰/۴۵۱۱(۰/۰۰۰۳)	۰/۴۵۰۸(۰/۰۰۰۴)

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203]

از جدول ۱ ملاحظه می‌شود که برآوردگرهای بیزی عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی (MLE) دارند. هم‌چنین در بین برآوردگرهای بیزی بر اساس معیار MSE برآوردگرهای بیز با تابع زیان لاینکس، در مقایسه با برآوردگرهای کلاسیک دارای بهترین عملکرد هستند.

۵-۲ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش جهت بررسی عملکرد روش‌های پیشنهادی داده‌های ارایه‌شده در [۲۳] در نظر گرفته می‌شود. این داده‌ها طرح پنجره هواپیما تمام شیشه‌ای را توصیف می‌کنند که استحکام پنجره جلا داده شده را اندازه‌گیری می‌کند. مجموعه داده‌ها به شرح زیر هستند.

نتایج بازه‌های اطمینان در جدول شماره ۲ آورده شده است. این دو مجموعه داده که در جدول شماره ۳ گزارش شده‌اند برای بررسی مدل پواسون-نمایی در نظر گرفته می‌شوند. جهت برآورد پارامترهای این مدل، از روش ماکسیمم درستنمایی و بیز استفاده شده است. برای آزمون نیکویی برازش مدل منفی لگاریتم درستنمایی، معیار اطلاع آکائیک (AIC) و آماره آزمون کولموگروف-اسمیرنوف $(K-S)$ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که از جدول ۴ مشاهده می‌شود توزیع EP برازش مناسبی برای داده‌های هر دو گروه فوق است. به‌علاوه برابری پارامتر مشترک λ برای هر دو مجموعه داده با استفاده از آزمون فرض $H_۰ : \lambda_۱ = \lambda_۲$ در مقابل $H_۱ : \lambda_۱ \neq \lambda_۲$ بررسی شده است.

برای این منظور p مقدار متناظر برابر ۰/۴۷۰۶ بوده است. بنابراین با توجه به نتایج حاصل فرض برابری λ برای دو مجموعه داده رد نمی‌شود.

با به‌کارگیری داده‌های جدول ۳ برآوردگرهای پارامتر R و بازه اطمینان HPD به روش MCMC تحت توزیع پیشین ناآگاهنده، یعنی $a_۱ = b_۱ = a_۲ = b_۲ = ۰$ محاسبه و نتایج در جدول ۵ گزارش شده است.

جدول ۲. بازه اطمینان ۹۵%، **AN** و **HPD** پارامتر R

R	$n_۱$	$n_۲$	$(r_۱,r_۲)$	AN	HPD
۰/۲	۴۰	۵۰	(۱۰,۱۰)	(۰/۲۰۱۲,۰/۴۴۳۷)	(۰/۱۳۵۲,۰/۴۴۶۷)
			(۲۰,۲۰)	(۰/۱۵۱۳,۰/۲۳۵۴)	(۰/۲۴۳۱,۰/۲۹۷۴)
			(۲۰,۳۰)	(۰/۳۳۰۶,۰/۳۸۵۲)	(۰/۲۴۹۶,۰/۲۹۷۶)
			(۳۰,۴۰)	(۰/۲۱۲۸,۰/۳۹۶۶)	(۰/۲۵۷۱,۰/۲۹۴۲)
			(۴۰,۵۰)	(۰/۲۱۹۸,۰/۳۹۰۴)	(۰/۲۷۲۳,۰/۳۳۹۴)
۰/۴۲			(۱۰,۱۰)	(۰/۳۴۲۱,۰/۵۳۰۵)	(۰/۳۴۴۴,۰/۵۵۹۱)
			(۲۰,۲۰)	(۰/۴۰۳۱,۰/۵۷۵۴)	(۰/۴۵۰۷,۰/۵۴۲۱)
			(۲۰,۳۰)	(۰/۳۹۶۳,۰/۵۵۳۲)	(۰/۴۱۱۷,۰/۴۸۹۸)
			(۳۰,۴۰)	(۰/۴۰۰۶,۰/۵۷۱۷)	(۰/۴۱۴۰,۰/۵۰۰۰)

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203] [Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

$(۴۰,۵۰)$	$(۰/۴۳۳۸,۰/۵۱۱۵)$	$(۰/۴۵۱۳,۰/۵۲۱۱)$

جدول ۳. مجموعه داده‌های اول و دوم

X	۳۵/۹۱۰	۳۹/۵۸۰	۳۳/۷۳۰	۳۳/۷۶۰	۲۶/۷۷۰	۴۵/۳۸۱	۴۴/۰۴۵	۲۷/۶۷۰	۲۷/۰۵۰	۲۵/۸۰۰
Y	۳۵/۷۵۰	۳۳/۸۹۰	۲۷/۶۷۰	۳۹/۵۸۰	۴۵/۲۹۰	۳۱/۱۱۰	۳۷/۰۹۰	۳۷/۰۸۰	۳۳/۲۰۰	۴۴/۰۴۵
									۲۶/۷۷۰	۳۶/۹۸۰

جدول ٤. آزمون نیکویی برازش مدل

مجموعه داده‌ها	$-\log L$	AIC	$K-S$	$p-value$
اول	۳۳/۰۴۳	۷۰/۰۸۶	۰/۱۰۲۱	۰/۵۸۳۳
دوم	۳۷/۸۱۶۵	۷۹/۶۳۳۱	۰/۹۶۸۷	۰/۶۲۱۷

جدول ٥. برآورد پارامتر R مجموعه داده‌های واقعی

		Bayes	
$(r_۱,r_۲)$	MLE	SEL	LINEX
$(۵,۶)$	۰/۲۰۳۰	۰/۳۴۶۸$(۰/۳۰۹۸,۰/۶۵۷۸)$	۰/۳۴۳۵
$(۷,۹)$	۰/۴۹۶۵	۰/۴۱۶۹$(۰/۳۸۶۹,۰/۶۱۸۱)$	۰/۶۱۸۱

جدول ٦. فاصله اطمینان پارامتر **R** مجموعه داده های واقعی

	MLE	Bayes
$(r_۱,r_۲)$		
$(۵,۶)$	$(۰/۱۸۷۷,۰/۶۷۷۸)$	$(۰/۳۰۹۸,۰/۶۵۷۸)$
$(7,9)$	$(۰/۴۵۳۱,۰/۶۹۸۱)$	$(۰/۳۸۶۹,۰/۶۱۸۱)$

همان‌طور که در جدول ۵ و ۶ مشاهده می‌شود مقادیر برآوردگرهای بیز و تابع لینکس برای $(r_۱,r_۲)$ مختلف، نزدیکی بهم دارند، اما برآوردگر ماکسیمم درستنمایی اختلاف دارد. هم‌چنین طول فواصل اطمینان HPD برای $(r_۱,r_۲)$ مختلف دارای کم‌ترین طول است. با توجه به عملکرد خوب برآوردگر بیز و فواصل اطمینان حاصل از آن، در عمل می‌توان با توجه به شرایط مساله از روش استفاده کرد.

٦ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش‌های بهینه‌ای برای پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت تحت نمونه‌های سانسورشده نوع دوم در توزیع پواسون-نمایی با پارامترهای شکل یکسان مورد مطالعه قرار گرفته است. در این راستا برآوردگرهای

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203]

ماکسیمم درستنمایی و نیز بازه اطمینان تقریبی نرمال پارامتر R محاسبه شد. هم‌چنین جهت دستیابی به برآوردگرهای بیز از روش تقریب زنجیر مارکوف مونت کارلو استفاده و نتایج گزارش شد. نتایج شبیه‌سازی، بیانگر عملکرد بهتر برآوردگرهای بیز نسبت به برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی هستند. هم‌چنین در بین برآوردگرهای بیز، بهترین عملکرد به تابع زیان خطی نمایی متعلق است. نتایج شبیه‌سازی بیانگر آن است که با کاهش تعداد نمونه‌های سانسورشده نوع دوم ، مقادیر MSE و طول بازه‌های اطمینان کلاسیک و بیزی کاهش می‌یابند. هم‌چنین با به‌کارگیری داده‌های واقعی نیز عملکرد خوب برآوردگر بیز مشاهده گردید.

برآورد بهینه پارامتر تنش-مقاومت، پتانسیل بالایی برای توسعه و بهبود روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها در تحقیقات آینده دارد.

منابع

[1] Birnbaum, Z.W. (1956). On a use of the Mann-Whitney statistic. In: Proceedings of Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1, 13–17, University of California Press, Berkeley, CA.

[2] Birnbaum, Z. W., and Mc Carty, R. C. (1958). A Distribution-Free Upper Confidence Bound for P(Y < X), Based on Independent Samples of X and Y. The Annals of Mathematical Statistics, 558–562.

[3] Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003), The Stress-Strength Model and its Generalization, Theory and Application, New York: World scientific.

[4] Mahmoud, M. A. W., El-Sagheer, R. M., Soliman, A. A. and Abd Ellah, A. H. (2016), Bayesian Estimation of P [Y < X] Based on Record Values From the Lomax Distribution and MCMC Technique, Journal of Modern Applied Statistical Methods, 15, 488-510.

[5] Nadeb, H., and Torabi, H. (2019). Goodness-of-fit test for the family of location-scale distributions under type II progressive censoring. *Statistical Thought Journal*, 13, 197-221.

[6] Kohansal, A., Al-Mohammad, N. and Azizzadeh, F., (2020). Bayesian estimation of the stress-strength parameter under hybrid progressive censoring in the Lomax distribution. *Statistical Thought Journal*, 16, 505-534.

[7] Balakrishnan, N., Ng, H. K. T. and Kannan, N. (2002). A Test of Exponentiality Based on Spacings for Progressively Type-II Censored Data, in Huber-Carol, C., BalakrishnN., Nikulin, M. S. and Mesbah, M. (eds), Goodness-of-Fit Tests and Model Validity, Birkhäuser, Boston.

[8] Balakrishnan, N., Ng, H. K. T. and Kannan, N. (2004). Goodness-of-Fit Tests Based on Spacings for Progressively Type-II Censored Data from a General Location-Scale Distribution, IEEE Transaction on Reliability, 53, 349-356.

[9] Pakyari, R. and Balakrishnan, N. (2012). A General Purpose Approximate Goodness of-Fit for Progressively Type-II Censored Data, IEEE Transactions on Reliability, 61, 238-244.

[10] Pakyari, R. and Balakrishnan, N. (2013), Goodness-of-Fit Tests for Progres-sively Type-II Censored Data from Location-Scale Distributions, Journal of Statistical Computation and Simulation, 83, 167-178.

[11] Wang, B. (2008). Goodness-of-Fit Test for the Exponential Distribution Based on Progressively Type-II Censored Sample, Journal of Statistical Computation and Simulation, 78, 125–132

[12] Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). Progressive Censoring: Theory, Methods, and Applications, Birkhäuser, Boston.

[13] Asgharzadeh, A. and kazemi, M., (2014). Stress-Strength reliability of exponential distribution based on hybrid censored samples. Proceeding of 12th the Iranian Statistical Conference, 25-27 August, Razi University, Iran.

[14] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z., (2011). Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples, SORT, 35, 103-124.

[15] Saraoglua, B., Kinacia, I. and Kundu, D. (2012). On estimation offor $R = P\left(Y < X\right)$ exponential distribution under progressive type-II censoring. Journal of Statistical Computation and Simulation, 85, 729–744.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203]

[16] Rezaei, S., Alizadeh Noughabi, R. and Nadarajah, S., (2015). Estimation of stress strength reliability for the generalized Pareto distribution based on progressively censored samples. Journal of Annals Data Sciences, DOI: 10.1007/s40745-015-0033-0.

[17] Ahmadi, K. and Ghafouri, S., (2019). Reliability Estimation in a Multicomponent Stress-Strength Model under Generalized Half-Normal Distribution Based on Progressive type-II Censoring, Journal of Statistical Computation and Simulation, 89, 2505- 2548.

[18] Maurya, R. K. and Tripathi, Y. M., (2019) Reliability Estimation in a Multicomponent Stress-Strength Model for Burr XII Distribution under Progressive Censoring, Brazilian Journal of Probability and Statistics , Accepted.

[19] Kohansal, A. and Rezakhah, S. (2019). Inference of $R = P(Y < X)$ For Two Parameter Rayleigh Distribution Based on Progressively Censored Samples, Statistics, 53, 81-100.

[20] Kohansal, A., (2020). Bayesian and Classical Estimation ofBased on Burr $R = P(Y < X)$ Type XII Distribution under Hybrid Progressive Censored Samples, Communications in Statistics-Theory and Methods, 49, 1043-1081.

[21] Mohamed, M. O., (2015). Reliability with stress-strength for poisson-exponential distribution. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience 12.11: 4915-4919.

[22] Chen, M.H., and Shao, Q.M., (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals. Journal of Computational and Graphical Statistics, 8(1), 69–92.

[23] Pepi, J. W. (1994). Failsafe design of an all BK-7 glass aircraft window. SPIE Proc, 2286, 431–443.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-05-13]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2203]